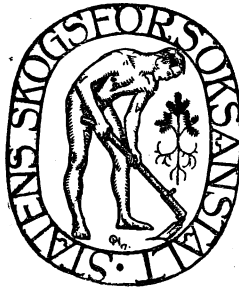


# EINIGE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE SCHAFTFORM

*NÅGRA UNDERSÖKNINGAR ÖVER STAMFORMEN*

AV

LARS TIRÉN



---

**MEDDELANDEN FRÅN STATENS SKOGSFÖRSÖKSANSTALT**  
**HÄFTE 24 · Nr 4**

---

MEDDELANDEN

FRÅN

STATENS  
SKOGSFÖRSÖKSANSTALT

HÄFTE 24. 1927—28

MITTEILUNGEN AUS DER  
FORSTLICHEN VERSUCHS-  
ANSTALT SCHWEDENS

24. HEFT

REPORTS OF THE SWEDISH  
INSTITUTE OF EXPERIMENTAL  
FORESTRY

N:o 24

BULLETIN DE L'INSTITUT D'EXPÉRIMENTATION  
FORESTIÈRE DE LA SUÈDE

N:o 24



REDAKTÖR:  
PROFESSOR DR HENRIK HESSELMAN

# INNEHÅLL:

	Sid.
ROMELL, LARS-GUNNAR: Studier över kolsyrehushållningen i moss-rik tallskog .....	I
Studien über den Kohlensäurehaushalt in moosreichem Kiefernwald .....	35
— En nitritbakterie ur svensk skogsmark .....	57
Un ferment nitreux forestier .....	63
— Markluftsanalyser och markluftning .....	67
Soil Air and Soil Aeration .....	76
TIRÉN, LARS: Einige Untersuchungen über die Schaftform .....	81
Några undersökningar över stamformen .....	150
— Till frågan om tallstammens avsmalning och volymberäkning .....	153
To the Question of Tapering and Volume Calculation of Pine Trunks .....	160
PETRINI, SVEN: Sektionskuberingens noggrannhet .....	164
Die Genauigkeit der sektionsweisen Kubierung .....	181
— En närmeformel för kubering av träd .....	187
Eine Näherungsformel für Stammkubierung .....	212
SPESSIVTSEFF, PAUL: Studier över de svenska barkborrarnas biologi särskilt med hänsyn till generationsväxlingen. Del I. ....	221
Studien über die Biologie der Borkenkäfer Schwedens mit besonderer Berücksichtigung der Generationsfrage. Erster Teil .....	244
MALMSTRÖM, CARL: Våra torvmarker ur skogsdikningssynpunkt ...	251
Our Peat Areas from the Point of Forest-draining .....	352
Redogörelse för verksamheten vid Statens skogsförsöksanstalt under år 1927. (Bericht über die Tätigkeit der Forstlichen Versuchsanstalt Schwedens im Jahre 1927; Report on the Work of the Swedish Institute of Experimental Forestry).	
Allmän redogörelse av HENRIK HESSELMAN .....	373
I. Skogsavdelningen (Forstliche Abteilung; Forestry division) av HENRIK PETTERSON .....	373
II. Naturvetenskapliga avdelningen (Naturwissenschaftliche Abteilung; Botanical-Geological division) av HENRIK HESSELMAN .....	379
III. Skogsentomologiska avdelningen (Forstentomologische Abteilung; Entomological division) av IVAR TRÄGÅRDH .....	380
IV. Avdelningen för förnygringsförsök i Norrland (Abteilung für die Verjüngungsversuche in Norrland; Division for Afforestation Problems in Norrland) EDVARD WIBECK .....	381
Sammanfattning av arbetsprogrammet för åren 1927—1931 .....	386
Zusammenfassung des Arbeitsprogrammes für die Jahre 1927—1931 .....	



## EINIGE UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE SCHAFTFORM.

(Resümee einer mathematischen Durcharbeitung der mechanischen Schaftformtheorie und einiger Versuche zur Anwendung derselben).

### Einleitung.

Der Zuwachsbetrag, den die Natur der lebenden Substanz selbst, das Klima, die Bonität des Bodens und die Waldpflege jedem einzelnen Baum gestatten, verteilt sich irgendwie auf die Blattmasse, die Zweige, den Stamm und die Wurzeln. Wie gross diese Zuwachsmenge ist, wie sie sich verteilt und wie sie sich an den verschiedenen Teilen des Baumindividuums orientiert, sind bedeutungsvolle Fragen, deren richtige Beantwortung unzweifelhaft die weitgehendsten Konsequenzen für die Projektierung des praktischen Waldbaues haben würde. Sie bilden zusammen einen speziellen Teil des allgemeinen Zuwachsesproblems und können unter dem Namen »das forstliche Zuwachsesproblem« zusammengefasst werden.

Beiträge zur Klarstellung desselben liefern hauptsächlich zwei Theorien, von denen jede eine für die Existenz des Baumes notwendige Voraussetzung ins Auge fasst. Die eine dieser Zuwachstheorien wird öfters »die mechanische Theorie« genannt und geht von der unerlässlichen Notwendigkeit hinreichender mechanischer Festigkeit des Baumkörpers aus. Die andere geht wieder von einer ebenfalls unerlässlichen Forderung zureichender Wasserversorgung für die Krone aus. Diese letztere Theorie gründet sich also auf den Transpirationsprozess und wird deshalb gewöhnlich »die Transpirationstheorie« genannt. Die mechanische Theorie wurde in forstlicher Ausformung in den Jahren 1893—95 von dem jetzigen Attaché in Helsingfors, Professor CARL METZGER, vorgelegt (1893). Der Urheber der Transpirationstheorie ist der Professor an der École Polytechnique fédérale in Zürich, PAUL JACCARD, welcher dieselbe im Jahre 1919 in einer grösseren Preisschrift veröffentlichte (1919).

Der Vollständigkeit halber kann hier hinzugefügt werden, dass der Assimilationsprozess des Baumes als dritter Ausgangspunkt für die Beurteilung der Schaftform und des Zuwachses genommen werden kann.

Wohin dieser Weg schliesslich führt, ist jedoch noch nicht näher untersucht worden.<sup>1</sup>

Schon daraus, dass wenigstens zwei voneinander vollständig unabhängige Theorien zur Erklärung des Zuwachs- und Formbildungsproblems aufgestellt worden sind, geht hervor, dass dieses noch sehr grosse Schwierigkeiten in sich birgt. Für die forstliche Forschungsarbeit, damit sie nämlich richtigerweise jenen praktischen Zwecken diene, auf die hin jede vorwärtsstrebende Forschung direkt oder indirekt orientiert ist, ist es deshalb durchaus notwendig, zu einer klaren und haltbaren Auffassung der schwierigen Frage zu gelangen. In dem vorliegenden Aufsatz versuche ich, diesem Ziel dadurch näher zu kommen, dass ich die mechanische Schaftformtheorie, die mich besonders interessiert hat, mehr im Detail, als es bisher geschehen ist, durchforsche. Es ist um so leichter verständlich, dass dieser Weg gewählt wurde, als die mechanische Schaftformtheorie in Schweden besonders wichtigen praktischen Arbeitsmethoden zugrunde liegt. Es muss zunächst eine für die forstliche Tätigkeit dringende Frage sein, ob diese auf eine Realität oder Chimäre basiert sind. Die mathematischen Auseinandersetzungen, welche einen erheblichen Raum in diesem Aufsatz einnehmen, und deren Bedeutung vielleicht nicht sofort in die Augen fällt, bilden ein notwendiges Glied in der Arbeit an der Lösung dieses Problems.

Die Hauptgesichtspunkte der mechanischen Theorie sind wohlbekannt und brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Um diese strikt anwenden zu können, muss, wie man unmittelbar einsieht, Folgendes bekannt sein: 1:o die Windgeschwindigkeit im Bestande, 2:o der von der Krone empfangene Winddruck, 3:o die der Beeinflussung des Windes ausgesetzte Oberfläche der Krone. Jedes einzelne dieser drei wesentlichen Momente habe ich deshalb untersucht und wird hierüber in den drei ersten Kapiteln ein kurzgefasster Bericht gegeben. Danach folgt in Kapitel IV und V eine Darstellung der theoretisch-mechanischen Verhältnisse, die von fundamentaler Bedeutung für die Theorie sind. Erst danach folgt im Kapitel VI eine Anwendung auf ein paar Probefichten und in Kapitel VII eine Studie über die Schaftform dichtgeschlossener Bestände.

Damit der Zusammenhang dieser recht zersplitterten Arbeit nicht gänzlich durch die Menge der darin behandelten verschiedenen Fragen verdeckt werde, will ich hier einige Bemerkungen vorausschicken.

<sup>1</sup> Vgl. die Untersuchung von GANSSEN u. GÖRZ, Mitteil. aus d. Lab. d. Preuss. Geol. Landesanst., sowie Deutsche Waldwirtschaft etc., ERH. HAUSENDORFF.

Von besonderer Interesse für die Auffassung der mechanischen Theorie wie auch der Transpirationstheorie, sowie für das Verständnis der physiologischen Vorgänge der Bäume überhaupt sind die Untersuchungen von JAGADIS CHUNDER BOSE. (Physiologie des Saftsteigens u. a. m.).

Die im Kapitel VI vorgenommene Prüfung der Theorie gab so gute Resultate, dass ich dadurch veranlasst wurde, die Gültigkeit für gewöhnliche, normale Stämme bis auf weiteres als ganz klar zu betrachten. Ich versuchte danach mechanische Berechnungen auf einige mehr oder weniger abnorme Schaftformen anzuwenden, unter diesen hauptsächlich solche, die in äusserst gedrängt geschlossenen Beständen zu finden sind. Diese Untersuchung wieder brachte sehr unsichere und schwer zu deutende Resultate, was zur Folge hatte, dass die Frage auch hinsichtlich normaler Bestände wieder aufgenommen wurde. Von diesen letzteren Untersuchungen liegen noch keine endgültigen Resultate vor. Sie sind auch nicht im Felde fertig. Die Lage, in der sich die Frage der Schaftform, des Zuwachses und der absoluten Dimensionen, von mechanischem Gesichtspunkte aus betrachtet, vorläufig befindet, ist folglich sehr labil, und es ist noch vollkommen unmöglich, eine bestimmte Auffassung des Problemes zu formulieren.

Um einem Missverständnis vorzubeugen, das sonst leicht unterlaufen könnte, will ich erwähnen, dass in dieser Frage das Ziel der Forschung nicht in einer Wahl zwischen den zwei oder drei obengenannten Zuwachs- und Schaftformprinzipien erblickt werden darf, sondern vielmehr in einer Ergründung der Art ihres Zusammenwirkens und einer Unterscheidung der Fälle, in denen bald das eine, bald das andere die dominierende Rolle spielt. Er dürfte wohl auch unnötig sein, besonders hervorzuheben, dass eine befriedigende Lösung des Zuwachsesproblems schliesslich nur eine physiologische sein kann, d. h. die physiologische Kausalität muss einmal vollständig beachtet werden.

Ein beträchtlicher Teil der vorliegenden Arbeit ist durch einen Geldbeitrag aus dem Fonds für forstwissenschaftliche Forschung ermöglicht. Dem Verwaltungsrat bezeuge ich hiermit ehrerbietigst meine tiefgefühlte Dankbarkeit.

## KAP. I. Die Geschwindigkeit des Windes im Bestande.

Dieses Kapitel bildet ein kurzes Resümee eines kleinen von mir früher auf schwedisch publizierten Aufsatzes (1924). Die Untersuchungen wurden in 5 Beständen, wovon 4 Fichtenbestände und 1 Kiefernbestand, ausgeführt. Ausserdem wurden auch Messungen auf freiem Felde vorgenommen, wobei jeder Bestand wenigstens 100 m von dem Messungsplatz entfernt lag. Die Bestände waren verschieden dicht geschlossen. Nach der in Schweden üblichen Skala für den Bestandesschluss gehörten sie zu den Graden 0,2, 0,5, 0,7 und 0,8. Die Ziffer 0,2 repräsentiert einen äusserst lockeren Schluss, und Bestände mit diesem geringen

Dichtigkeitsgrad werden meistens als Kahlboden gerechnet. Die Schlussgrade 0,7 und 0,8 kommen am öftesten vor. Vollgeschlossene (1,0) Bestände konnten für diese Untersuchung nicht gefunden werden. Der Schlussgrad des Kiefernbestandes war 0,8. Eine genauere Charakteristik der Schlussgrade könnte freilich mit Hilfe der Mittelhöhe und der Grundfläche des Bestandes geliefert werden, aber da die Messungen der Windgeschwindigkeit nur ziemlich wenige und nur dazu bestimmt sind, eine Auffassung von den ungefähren Veränderungen derselben zu geben, dürfte eine nähere Präzision des Bestandesschlusses in diesem Zusammenhang unnötig sein.

Für die Messung der Windgeschwindigkeit wurden drei Windmesser von ROBINSON'schem Typus benutzt. Eines der Instrumente wurde an dem einen Ende einer 3 m langen Holzstange, die beiden anderen in derselben Weise je an einer 9 m langen Stange angebracht. Das erstgenannte Instrument und eines der beiden anderen wurden nebeneinander in dem Bestande, wo die Messungen auszuführen waren, aufgestellt. Von diesen beiden Instrumenten erhielt man somit Angaben der Windgeschwindigkeit in 3 resp. 9 m Höhe über dem Boden. Der dritte Windmesser wurde auf freiem Felde ausserhalb des Bestandes an der Windseite derselben aufgepflanzt. Es ist ja klar, dass die von diesem Instrumente erhaltenen Windgeschwindigkeitsangaben den wirklichen Windgeschwindigkeiten oberhalb des Bestandes, in welchem sich die beiden anderen Instrumente befinden, nur sehr annähernd entsprechen können. Gewisse Vorsichtsmassregeln wurden jedoch getroffen, betreffs der Aufstellung der Instrumente, des Abstandes zwischen denselben und des Zeitpunktes der Messungen, um den Fehler auf ziemlich mässige Beträge herunterzubringen.

Angaben der Windgeschwindigkeiten in m pro sec werden in nachstehender Tabelle 1 mitgeteilt.

Tab. 1. Windgeschwindigkeiten der untersuchten Bestände in m/sec.  
Vindhastigheter i de undersökta bestånden i m/sek.

Höhe über dem Boden m	Fichtenbestände				Kiefern- bestand	Freies Feld
	1	2	3	4		
3 .....	1,8	1,5	1,2	0,6	1,1	2,9
9 .....	2,7	2,0	2,2	1,2	1,7	3,1
Oberhalb der Gipfel...	3,8	3,8	6,9	4,3	5,1	—
Anzahl der Messungen	4	14	9	6	6	12
Anzahl der Plätze, wo Mess. ausgef. wurden	1	3	2	2	3	3

Diese Angaben sind in relative Masse umgerechnet worden, die Windgeschwindigkeit oberhalb des Bestandes dabei = 10 gesetzt; die Wind-



Rel. Bertanderhöhe

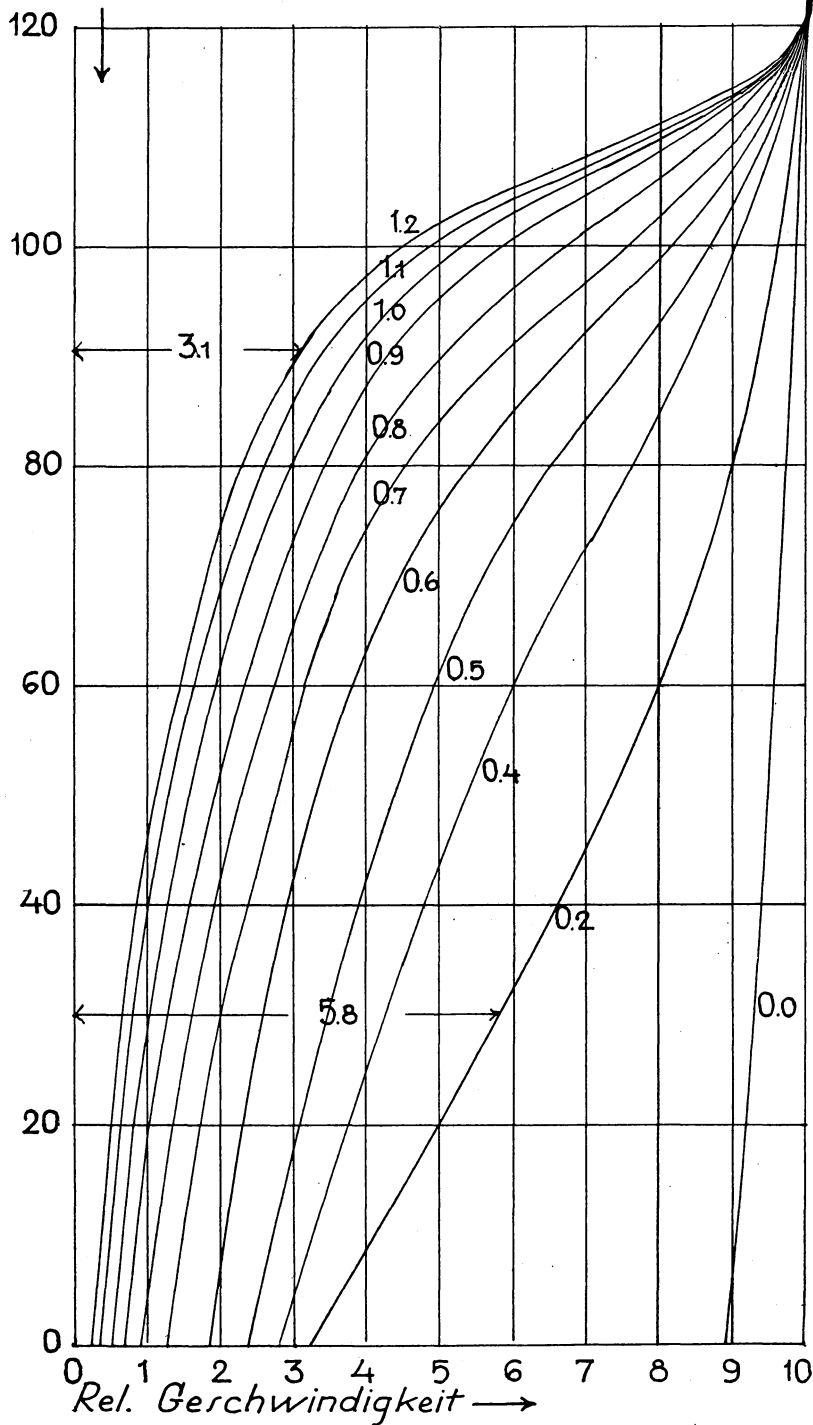


Fig. 1. Approximative Windgeschwindigkeiten für verschiedene Schlussgrade. Für den Schlussgrad 1,2 und in  $90/120$  der grössten Höhe des Bestandes liest man eine Geschwindigkeit 3,1 ab. Für den Schlussgrad 0,2 in  $30/120$  der grössten Höhe findet man eine Geschwindigkeit 5,8.

Approximativa vindhastigheter för olika slutenhetsgrader.

geschwindigkeitskurven wurden sodann graphisch entworfen, wobei auch die Windkurven der fehlenden Schlussgrade durch Inter- und Extrapolation erhalten wurden.

In Fig. 1 werden die Veränderungen der Windgeschwindigkeit von den Baumwipfeln bis zum Boden in den untersuchten Beständen veranschaulicht, und in Tab. 2 werden in relativen Massen die Windgeschwindigkeiten in verschiedenen Niveaus in Beständen (Fichte) von verschiedener Geschlossenheit mitgeteilt. Auf Grund gewisser Umstände, die hier nicht näher berührt werden, ist die relative grösste Höhe des Bestandes = 120 gesetzt.

Tab. 2. Relative Grösse der Windgeschwindigkeit in Beständen von verschiedenem Schlussgrad.

Relativ vindhastighet i bestånd av olika slutenhet.

Schlussgrad	Relative Höhe über dem Boden					
	20	40	60	80	100	120
0,0	9,2	9,4	9,5	9,6	9,8	10,0
0,2	5,0	6,5	8,0	9,0	9,5	»
0,4	3,6	4,8	6,0	7,6	9,0	»
0,5	3,2	4,0	4,9	6,5	8,7	»
0,6	2,4	3,0	3,8	5,4	8,1	»
0,7	1,7	2,4	3,2	4,5	7,5	»
0,8	1,3	2,0	2,8	3,9	6,7	»
1,0	0,8	1,3	2,0	3,0	5,2	»
1,1	0,6	1,0	1,7	2,6	4,8	»
1,2	0,5	0,8	1,5	2,3	4,4	»

Die in Tab. 2 angegebenen Ziffern haben selbstverständlich eine sehr begrenzte Gültigkeit. Teils ist die Untersuchungsmethode selbst mit grossen Schwächen behaftet, teils sind die Messungen wenige und teils die wirklichen Windgeschwindigkeiten, bei denen die Messungen vorgenommen wurden, nicht besonders gross, was alles dahin zusammenwirkt, die Angaben sehr approximativ zu machen. Es muss dies genau im Gedächtnis behalten werden, wenn sie dennoch mangels etwas Besseren im Folgenden zur Anwendung kommen.

## KAP. II. Der Druck des Windes auf die Kronenfläche.

Betreffs des Druckes des Windes auf die Kronenfläche lässt uns sowohl die klassische als die moderne, hochentwickelte Hydrodynamik im Stich. Der ersteren nach soll der Druck ( $T$ ) proportional sein einer gewissen Potenz der Geschwindigkeit ( $h$ ) des beweglichen Fluidums. Diese Potenz schwankt je nach der Beschaffenheit des Fluidums und der

Grösse der Geschwindigkeit zwischen den Werten: 2 (NEWTON),  $3/2$  (ALLEN) und 1 (STOKES). Auch wenn ich diese Potenz zwischen den Extremwerten 1 und 2 wechseln lasse, ist es mir nicht gelungen, die Form eines Schaftes mit Hilfe mechanischer Formeln richtig zu berechnen. Dadurch wurde ich veranlasst, den von der Baumkrone empfangenen Winddruck näher, aber immerhin nur flüchtig, zu untersuchen.

Es wurde zu diesem Zweck eine zweiflüglige Luftschraube von Flugmaschinentypus konstruiert und an einem elektrischen Motor von 15 PS und einer Umdrehungszahl von 1,400 in der Minute montiert. Vor dem Propeller wurde ein hölzernes Rohr von 1,8 m Durchmesser aufgestellt. Durch einen in den Stromkreis eingeschalteten Wasserwiderstand wurde

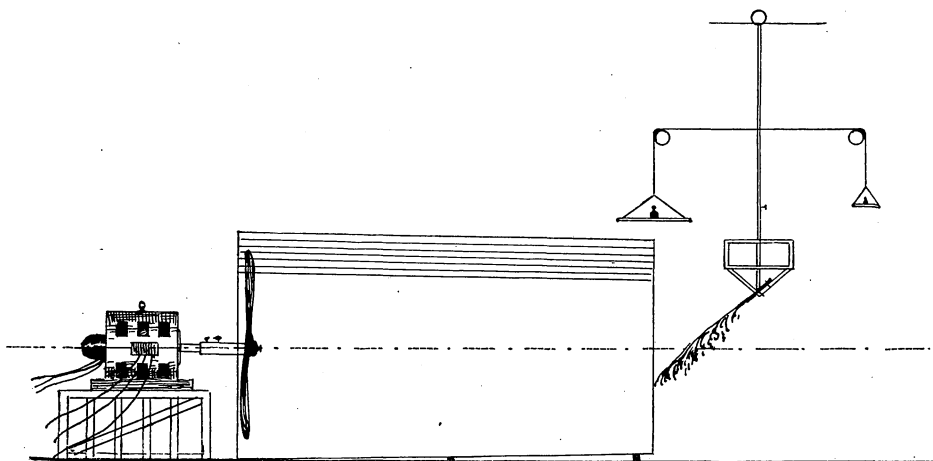


Fig. 2. Schematisiertes Bild der Versuchsanordnung.  
Schematiserad bild av försöksanordningen.

die Rotationsgeschwindigkeit des Propellers regulierbar gemacht. Vor dem Rohr wurde eine Pendelvorrichtung aufgehängt (siehe Fig. 2), an der Äste in verschiedenen Lagen im Verhältnis zur Windrichtung befestigt werden konnten. Durch Gewichte wurde der Pendel in konstanter, vertikaler Lage gehalten. Obwohl manches an der Versuchsanordnung ausgesetzt werden könnte, fungierte sie doch gut, und für eine Orientierung in der Frage, glaube ich, darf man sie als einigermaßen ausreichend ansehen. Es ist jedoch wahrscheinlich, dass die Wirbel des durch die Schraube erzeugten Luftstromes kräftiger ausfallen als die Wirbel des natürlichen Windes.

Untersucht wurden 7 Fichtenäste von verschiedener Grösse und Steifheit wie auch 2 Kiefernäste. Sie wurden der Einwirkung von Windgeschwindigkeiten zwischen etwa 4 und 16 m/sec in 5 verschiedenen Lagen (siehe Fig. 3) ausgesetzt.

Aus Fig. 4, die alle Messungen für einen der Fichtenzweige wiedergibt, geht deutlich hervor, dass der NEWTON'sche Satz:  $T = ch^2$  nicht gültig sein kann.

Überhaupt kann keine Kurve des parabolischen Typus:  $T = ch^n$  mit konstantem Exponent  $n$ , die Abhängigkeit zwischen Windgeschwindigkeit und Winddruck wiedergeben. Auch wenn der Exponent  $n$  zwischen den Werten 1 und 2 variiert wird, kann eine Kurve von dem fraglichen Typus nicht entstehen. Das Charakteristische für die experimentelle Druckkurve ist das Vorhandensein eines Inflexionspunktes. Links (Intervall 0 — Infl. p.) von diesem ist die Kurve konvex gegen die Windgeschwindigkeitsachse, rechts (Infl. p. →) ist sie konkav.

Die Ursache ist die, dass bei hohen Windgeschwindigkeiten der Ast sehr stark gebogen wird, und ausserdem kleine Zweige zweiter und

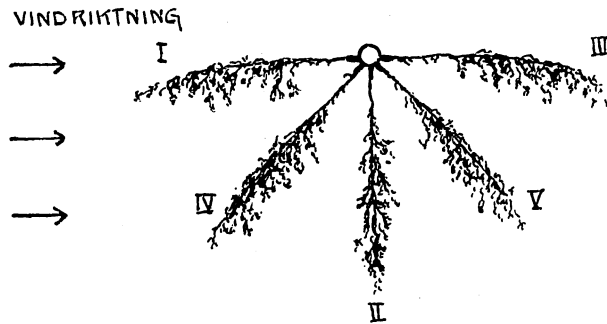


Fig. 3. Die verschiedenen Lagen der Äste im Verhältnis zur Windrichtung.  
Kvistarnas olika ställning i förhållande till vindriktningen.

höherer Ordnung aneinandergedrückt werden, was alles dazu mitwirkt, dass ein beträchtlicher Teil der Nadelfläche der Windbeeinflussung entzogen oder zum mindesten weniger stark beeinflusst wird. Der durch die Windgeschwindigkeitszunahme bedingten Drucksteigerung wird dadurch entgegengewirkt, dass die dem Druck ausgesetzte Fläche verkleinert wird, sowie dadurch, dass der Zweig eine mehr oder weniger spindelförmige Gestalt annimmt, mit in der Windrichtung orientierter Längsachse. Diese Hemmung der Drucksteigerung wird leicht so stark, dass die Krümmung der Kurve aus Konvexität in Konkavität übergeht.

Zwischen den 5 verschiedenen Lagen der Äste besteht ein bedeutender Unterschied bezüglich der Grösse des pro Flächeneinheit empfangenen Druckes. Ganz natürlich ist ja auch, dass der grösste Druck in den Lagen I, IV und II empfangen wird und der kleinste in den Lagen III und V. Von der Lage I wäre vielleicht zu erwarten, dass sie den grössten Druck empfängt, und es ist auch nicht undenkbar, dass es sich

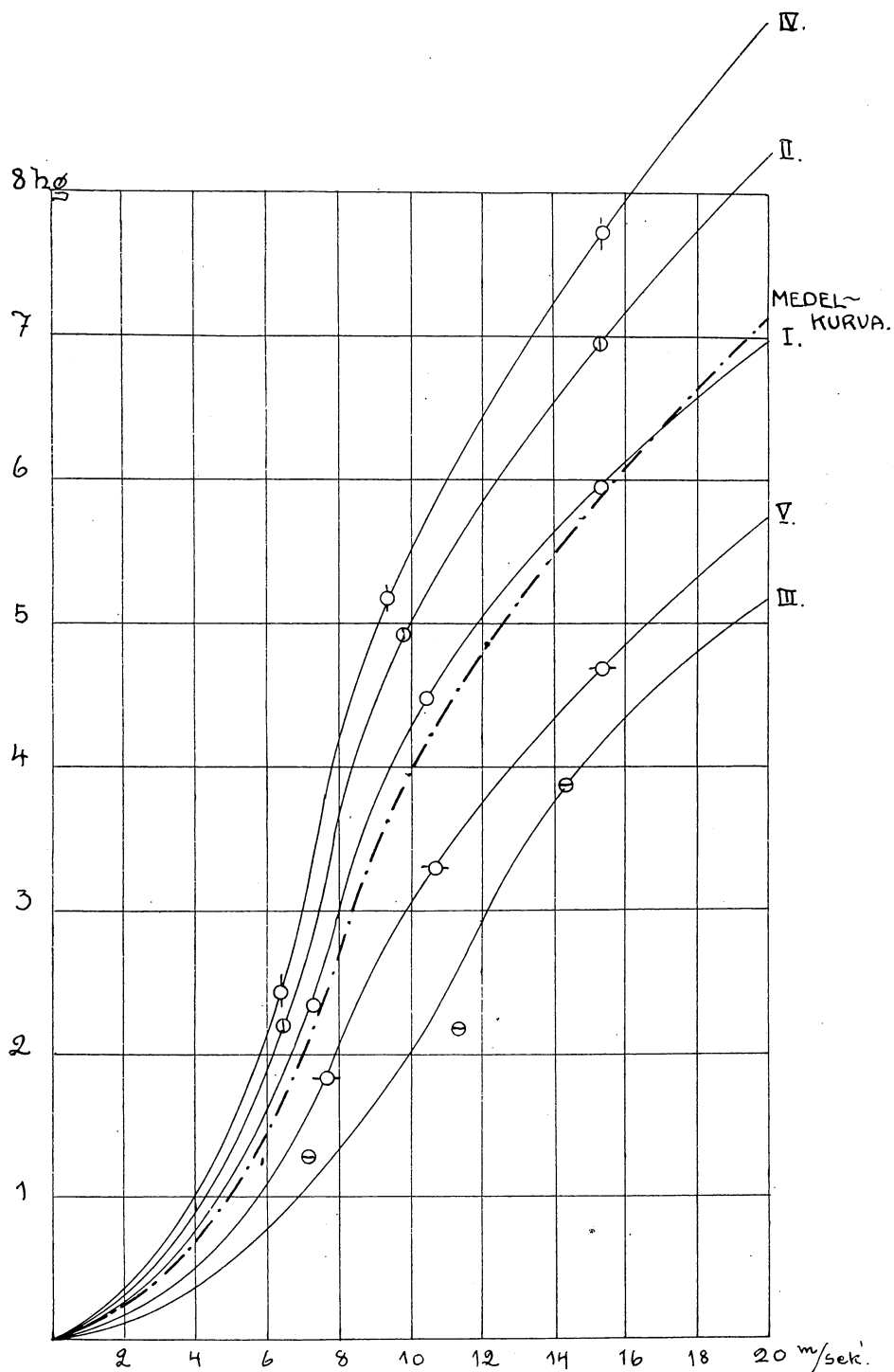


Fig. 4. Sämtliga Druckmässungen am Aste 2 g, T.  
Alla tryckmätningar å kvisten 2 g, T.

so verhält, obwohl die Messungen darauf hindeuten scheinen, dass die Lage I sich oft, aber jedenfalls nicht immer, zwischen die Lagen II und V, einrangiert. Dies kann von der Schwierigkeit herrühren, genaue Ablesungen des Druckes in dieser Lage vorzunehmen. Kräftige Pressungen entstanden nämlich in dem Pendel, wenn der Ast dem Wind gerade entgegen orientiert wurde, was zur Folge hatte, dass der Druck sehr erheblich variierte.

Um eine Auffassung von der Grösse des pro Flächeneinheit der Nadeln und Zweige empfangenen Druckes zu erhalten, ist die Fläche einiger Äste ermittelt worden. Es ist gewiss eine weniger gute Methode, durch eine solche Ziffer die Druckverhältnisse auszudrücken; eine bessere Methode steht jedoch nicht zur Verfügung. Es ergab sich, dass der Druck pro Flächeneinheit für verschiedene Äste sehr verschieden ausfiel. In Fig. 5 werden einige Druckkurven wiedergegeben, unter welchen Nr. V dem Mittel aller untersuchten Fichtenäste entspricht, Nr. III dem grössten und steifsten unter ihnen und Nr. X etwa dem weichesten. Weil jedoch keiner der Äste besonders kräftig und derb war, ist es äusserst wahrscheinlich, dass es noch schneller steigende Kurven gibt als Nr. III. Zwei solche sind vorschlagsweise in der Figur eingezeichnet. Es ist nämlich offenbar, dass die Stärke und die Steifigkeit des Astes eine grosse Rolle für seine Fähigkeit, Druck zu empfangen, spielen. Von wirklich knorrigen und dicken Kiefernästen kann man unzweifelhaft vermuten, dass sie weit mehr Druck empfangen, als es von Kurve I in Fig. 5 angegeben wird.

Betreffs Fig. 5 sei noch bemerkt, dass die Kurven als durchschnittliche Mittel der 5 Zweiglagen berechnet sind. Dadurch wird vielleicht den Lagen III und V zu grosses Gewicht beigemessen, da ja in einer wirklichen Baumkrone diese Lagen mehr oder weniger geschützt durch die übrigen sind. Dagegen ist es möglich, dass den Lagen I und IV zu wenig Gewicht beigelegt wird, da es nicht unmöglich ist, dass eine kompakte, dem Winde entgegengerichtete Zweigmasse mehr Druck pro Flächeneinheit empfängt als ein isolierter Ast.

### KAP. III. Die Fläche der Baumkrone.

Flächenbestimmungen der Nadeln und Zweige ist voraussichtlich eine nicht nur vom Schaftformgesichtspunkt aus sehr bedeutungsvolle Frage. Sie werden auch durch eine Reihe anderer Gesichtspunkte motiviert, die jedoch hier nicht näher erörtert werden können. Im Anschluss an meine Schaftformuntersuchungen habe ich gewisse derartige Bestimmungen

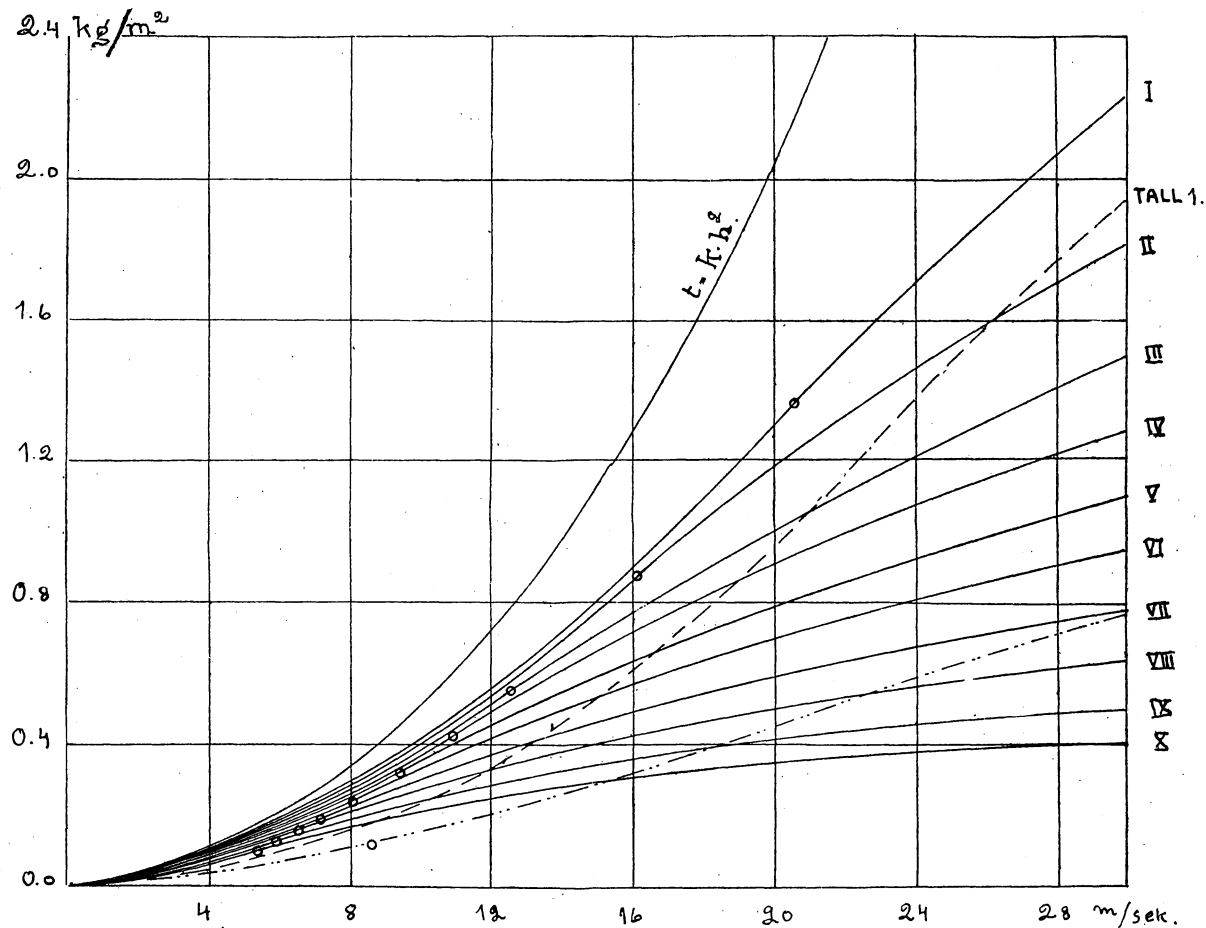


Fig. 5. Die Proportionalität zwischen Windgeschwindigkeit und Winddruck. Die Kurve V ist die Mittelkurve aller Versuche. Die Kreise markieren die Inflexionspunkte der betreffenden Kurven.

Förhållandet mellan vindhastighet och vindtryck. Kurva V är medeltalet av alla försöken.

ausgeführt, die immerhin nur präliminärer Natur waren. Später sind sie in grösserem Umfang wiederholt worden und dauern immer noch fort. Ich halte es darum für genügend, hier nur einige der hauptsächlichen, bisher gewonnenen Resultate zu erwähnen und für die Einzelheiten auf eine andere Publikation zu verweisen (1926 b).

Die Fläche ( $Y$ ) der Kiefernadeln wird nach folgender, vom Verfasser aufgestellten Formel berechnet:

$$Y = f_Y \cdot \frac{\pi}{2} l \cdot (1,137 b + r) \dots \dots \dots (1)$$

wo  $l$  = der Länge der Nadel von der Spitze bis zu der von den Nadelhüllen befreiten Basis,  $b$  = der Breite an der Mitte der Nadel, längs ihrer flachen Seite,  $r$  = der Dicke der Nadel an der Mitte, senkrecht zur flachen Seite ist, und wo  $f_Y$  eine Konstante von derselben Natur wie die gewöhnliche echte Schaftformzahl bezeichnet.  $f_Y$  wird vom Verfasser *Flächenformzahl* genannt. Sie variiert ein wenig mit der Nadellänge und hält sich meistens zwischen 0,82 und 0,98. Sie ist eine beinahe geradlinige Funktion des *relativen Radius* der Nadel, womit gemeint wird

der Ausdruck:  $\frac{\frac{b}{2} + r}{2l} \cdot 100$ . Die einzelnen Punkte liegen aber sehr zerstreut um die ausgleichende Kurve herum.

Die Fläche der Fichtennadeln wird berechnet nach der Formel:

$$Y = f_Y \cdot 2 l \cdot (d_1 + d_2) \dots \dots \dots (2)$$

wo  $d_1$  und  $d_2$  die beiden grössten Diagonalen an der Mitte der Nadel und  $f_Y$  und  $l$  Flächenformzahl bzw. Länge bedeuten. Es scheint, als wenn die Flächenformzahl der Fichtennadeln keine regelmässige Funktion der Nadellänge wäre, sondern sich ziemlich gleichförmig um einen Mittelwert = 0,715 herum gruppiert.

Für Kiefer beträgt die Nadelfläche pro kg Nadelfrischgewicht, welche Ziffer als am meisten anschaulich angeführt wird, zwischen ungefähr 6 und 7 m<sup>2</sup>. Die Fläche des Reises beträgt rund 0,50 bis 1,20 m<sup>2</sup>. Die Gesamtfläche der Krone pro kg Kronenfrischgewicht schwankt für Kiefer zwischen 3 und 4 m<sup>2</sup>. Betreffs der Fichte, die jedoch noch nicht besonders genau untersucht wurde, scheint es, als variierte die Kronenfläche im allgemeinen zwischen den Werten 3 und 5,5 m<sup>2</sup> pro kg. Die Nadelfläche der Fichte dürfte jedoch bis auf etwa 8 m<sup>2</sup> pro kg steigen können. Zahlenangaben betreffs der Nadelfläche pro Hektar dürften in diesem Zusammenhang von keinem Interesse sein.



#### KAP. IV. Über die Festigkeitskonstanten, das spezifische Gewicht und den Wassergehalt des frischen Holzes.

Da die Festigkeits- und Elastizitätseigenschaften des frischen Holzes eine grosse Rolle in den mechanischen Gleichungen spielen, müssen sie ziemlich ausführlich behandelt werden. Leider ist aber über ihre Variation und Grösse sehr wenig bekannt. Die Quellen, die zur Verfügung stehen, um wenigstens eine Auffassung davon zu erhalten, sind hauptsächlich die Untersuchungen JANKA's (1900—1904) in Österreich und WJLKANDER's in Schweden (1897). Ganz kürzlich ist ausserdem in dieser Frage eine grössere Untersuchung an der Staatlichen Materialprüfungsanstalt Schwedens zu Ende geführt worden, sie ist aber noch nicht publiziert worden. Dank freundlichem Entgegenkommen des Herrn Ingenieur R. R:SON SCHLYTER war es mir jedoch erlaubt, einen Blick auf einige der hauptsächlichsten Resultate zu werfen.

##### Festigkeit.

Es ist nicht leicht zu entscheiden, welche Festigkeitsziffer in die Berechnungen eingehen soll. Man hat dabei zu wählen zwischen wenigstens drei verschiedenen Prinzipien. Man kann rechnen mit der Spannung teils an der Kohäsions- oder Bruchgrenze, teils an der Fliessgrenze und teils an der Elastizitätsgrenze. Sobald unsere gewöhnlichen Nadelbäume in Frage kommen, handelt es sich aber immer um die Druckspannung an den peripheren Teilen des Stammquerschnitts, da die Druckspannung fast immer an der Peripherie am grössten wird, und die Druckfestigkeit des Holzes kleiner als die Zugfestigkeit ist. (Ausnahmen, die wir jedoch nicht näher besprechen, können vorkommen). Da es sich so verhält, ist es ganz klar, dass in der Hauptsache die Festigkeitseigenschaften des Splintes das grösste Interesse darbieten. Die Druckfestigkeit variiert ja beträchtlich, teils und vor allem mit dem Wassergehalt des Holzes, teils auch mit dem spezifischen absoluten Trockengewicht. Doch sind aber die Eigenschaften des Splintes in dieser Hinsicht durchaus viel homogener als die des Holzes im allgemeinen. Der Variationsbereich der Druckfestigkeit wird also dadurch erheblich beschränkt, dass man nur auf den Splint achtzugeben braucht, oder sogar nur auf den äussersten Teil davon. Da aber der Wassergehalt und das spezifische Gewicht dieses letzteren auch variieren können, so bleibt doch einige Festigkeitsvariation bestehen.

Die Druckfestigkeit an der Kohäsions- oder Bruchgrenze ist die grösste der obengenannten drei Ziffern. Danach kommt die Festigkeit an der Fliessgrenze und zuletzt die Elastizitätsgrenze. Nach JANKA beträgt die

letzte Ziffer etwa 52 % der ersten für lufttrockenes Holz. Für wassergetränktes Holz ist das entsprechende Prozent bloss 28,5. Nach den von der Staatlichen Materialprüfungsanstalt vorgenommenen Untersuchungen variiert das Prozent zwischen 50 und 90, hält sich aber meistens zwischen 60 und 70, dies für Holz, dessen Wassergehalt zwischen 0—za. 36 % des absoluten Trockengewichtes variiert. Durch die Untersuchungen über die Druckfestigkeit, welche ich selbst mit ganz frischem Holz ausgeführt habe, bin ich zu der Auffassung gekommen, dass es keine ausgeprägte Elastizitäts- oder Proportionalitätsgrenze gibt, bei den grossen Wassergehalten, um die es sich hier handelt. Dies scheint auch aus den Untersuchungen JANKA's hervorzugehen, wo die Festigkeit an der Elastizitätsgrenze und bei 63,1 % Wassergehalt des absoluten Trockengewichtes durchschnittlich mit 49 kg/cm<sup>2</sup> angegeben wird, also eine abnorm niedrige Ziffer.

Die Fliessgrenze wird nach JANKA erreicht bei einer Spannung von 90 % der Bruchfestigkeit für lufttrockenes Holz und 85,3 % für wassergetränktes. Auch diese Prozente variieren recht beträchtlich.

Im grossen und ganzen hängen die Spannungen an den verschiedenen Grenzen voneinander ab, aber die Abhängigkeit ist ziemlich unregelmässig. Einer und derselben Festigkeit an der Bruchgrenze kann ja zum Beispiel eine Spannung an der Elastizitätsgrenze von 50 bis 90 % davon entsprechen. Nach JANKA sollte das Intervall zwischen 28—52 % liegen.<sup>1</sup> Die Spannung an der Fliessgrenze für feuchtes (63 %) Holz kann variieren zwischen 74 und 91 % der Spannung an der Bruchgrenze (JANKA). Je nachdem, welche dieser Ziffern bei den Berechnungen gebraucht wird, erhält man also verschiedene zulässige Belastungen, verschieden nicht nur in Bezug auf ihre durchschnittliche Höhe, sondern eben individuell oder, wenn ich so sagen darf, qualitativ verschieden, weil ja eine und dieselbe Bruchspannung nicht immer gleicher Spannung an der Fliess- oder Elastizitätsgrenze entspricht.

Dank freundlichem Entgegenkommen des Herrn Professors G. LUNDBERG bin ich in der Lage gewesen, einige der Probestämme in Bezug auf die Druckfestigkeit mit der Prüfungsmaschine der SKOGSHÖGSKOLAN zu untersuchen. Es ergab sich dabei, dass die Druckfestigkeit durchschnittlich für den ganzen Stammquerschnitt mit der Höhe über dem Boden sinkt. Doch ist dieses Sinken gering und zweifellos grösstenteils abhängig von dem Verhältnis zwischen wasserärmerem Innenholz und wasserreicherem Aussenholz. Es gab bei diesen Probestämmen keinen markierten Unterschied zwischen Kern- und Splintholz. Eine Reduktion der Dimen-

<sup>1</sup> Der grosse Unterschied zwischen den beiden Intervallen ist vielleicht auf verschiedenartige Definitionen zurückzuführen.

sionen für variable Festigkeit dürfte deshalb nicht vorzunehmen sein. Die Festigkeit liegt etwa bei  $225 \text{ kg/cm}^2$  im Durchschnitt für den ganzen Querschnitt. Betreffs des Aussenholzes dürfte deshalb eine Druckfestigkeit von za.  $200 \text{ kg/cm}^2$  ein ziemlich plausibler Wert sein, womit hier auch in der Folge gerechnet wird.

Die niedrigste Druckfestigkeit, die für naturfeuchtes Holz vermutlich in Frage kommt, dürfte sich nach Untersuchungen JANKA's und der Materialprüfungsanstalt zwischen  $150$  und  $160 \text{ kg/cm}^2$  halten. Diese niedrigste Ziffer bezieht sich auf Holz mit einem spez. Trockengewicht von  $0,34$ , also auf leichtes, frohwüchsiges Holz. Für ein spez. Trockengewicht von  $0,42$  ergibt sich als Minimum der Druckfestigkeit za.  $197 \text{ kg/cm}^2$  für einen Wassergehalt von za.  $70 \%$  des absoluten Trockengewichtes. Als eine Eigentümlichkeit kann erwähnt werden, dass laut JANKA's Untersuchungen die Druckfestigkeit ein Minimum für einen Wassergehalt hat, welcher, je nach dem spez. Trockengewicht, zwischen  $60$  und  $100 \%$  liegt.

#### Elastizität.

Betreffs der Elastizität frischen Holzes ist ebenso wenig oder weniger als hinsichtlich dessen Druckfestigkeit bekannt. Doch geht deutlich aus schwedischen wie auch deutschen Untersuchungen hervor, dass der Elastizitätsmodul sich mit dem Holzwassergehalt verändert. Die Veränderungen des Elastizitätsmoduls sind jedoch nicht so gross wie die der Druckfestigkeit. Von den Resultaten der schwedischen Untersuchungen weiss ich nicht mehr, als dass sie durchschnittlich einen Elastizitätsmodul von  $90,000$ — $100,000$  ergeben, für Holz von za.  $30$ — $40 \%$  Wassergehalt. Nach JANKA's Untersuchungen ergibt sich als Durchschnitt für  $12,6 \%$   $\text{H}_2\text{O}$ -gehalt ein Druckelastizitätsmodul von  $111,900 \text{ kg/cm}^2$  und für  $63,1 \%$   $\text{H}_2\text{O}$ -gehalt ein Elastizitätsmodul von  $96,800 \text{ kg/cm}^2$ . Für den Biegeselastizitätsmodul sind die entsprechenden Ziffern:  $14,3 \%$   $\text{H}_2\text{O}$ -gehalt, Elastizitätsmodul  $101,600 \text{ kg/cm}^2$ ;  $57,8 \%$   $\text{H}_2\text{O}$ -gehalt, Elastizitätsmodul  $84,000 \text{ kg/cm}^2$ . JANKA hält es für wahrscheinlich, dass der Elastizitätsmodul sich in derselben Weise wie die Druckfestigkeit verändert, da er also in einer krummlinigen Abhängigkeit von dem Wassergehalt steht, mit einem Minimum zwischen  $60$  und  $100 \%$   $\text{H}_2\text{O}$ -gehalt. Dies, nebst einigen vereinzelt Angaben, ist meines Wissens alles, was z. Z. für die Beurteilung der Grösse des Elastizitätsmoduls frischen Holzes zu Gebote steht.

Die Zerteilung des Stammes in wasserarmen Kern und wasserreichen Splint führt zu einer recht komplizierten Beziehung zwischen Elastizität und Schaftform gemäss den mechanischen Prinzipien. Es wäre allzu verwegen, diese Beziehung unter Zugrundelegung der obenstehenden

wenigen Notizen betreffs des Zusammenhanges des Elastizitätsmoduls mit dem Wassergehalt klarlegen zu wollen. Die Frage ist aber wichtig, und es scheint mir berechtigt, mit allem Vorbehalt einen Versuch zu machen, wenigstens eine Vorstellung davon zu erhalten. Die Richtlinien der folgenden Berechnung verdanke ich dem Herrn Dozenten H. FAXÉN.

Wenn der Elastizitätsmodul des Kerns  $E_k$  und des Splintes  $E_s$  genannt wird, so ist, wenn der  $H_2O$ -gehalt 12,6 bzw. 63,1 % beträgt, nach JANKA  $E_s = 0,865 \cdot E_k$ . Dieser Unterschied ist aller Wahrscheinlichkeit nach zu gross für die Verhältnisse in einem wachsenden Stamm. Wir nehmen daher an, dass  $E_s = 0,909 E_k$ . Das Verhältnis  $\frac{E_k}{E_s}$  ist nun  $= 1,1$ . Es ist möglich, dass der Unterschied grösser sein kann, wahrscheinlich ist es aber kaum.

Die Stamm- und Kernquerschnitte seien kreisrund und der Kernradius z. B.  $= 0,7$  des Stammradius. Dieser wird als variabel mit  $y$  und

die Spannung mit  $\sigma_y$  bezeichnet. Bei Biegung mögen die Querschnitte plan bleiben. Ist nun  $E$  konstant über den ganzen Querschnitt, kann man  $\sigma_y = c \cdot y$  setzen, wo  $c = \text{Konst.}$  Die Folge dieser Annahme ist die gewöhnliche Formel für das Biegemoment  $M_x$ :

$$M_x = \sigma_r \cdot \frac{\pi}{4} y^3 \dots (3)$$

Fig. 6. Element eines Stammes bei Biegung.  
Stammelement vid böjning.

wo  $\sigma_r$  = der peripheren Normalspannung ist.

Ist dagegen  $E_k > E_s$ , so muss die Spannung am äusseren Rande des Kerns grösser sein als die Spannung am inneren Rande des Splintes, weil der Querschnitt der Annahme nach plan bleibt. Hier entsteht also eine Diskontinuität (vgl. Fig. 6).

Bezeichnen wir nun den Kernradius mit  $r$  und den Stammradius mit  $R$ , so wird das Widerstandsmoment des Kerns  $= \frac{\pi}{4} \frac{r^4}{r}$  und das des Splintes  $= \frac{\pi}{4} \frac{(R^4 - r^4)}{R}$ . Das Widerstandsmoment des ganzen Stammquerschnittes wird also = der Summe der beiden Teilmomente. Wird mit  $\sigma_r$  und  $\sigma_R$  die Spannung am Kern- resp. Stammrande bezeichnet, erhält man das Biegemoment:

$$M_x = \sigma_r \frac{\pi}{4} r^3 + \sigma_R \frac{\pi}{4} \left( \frac{R^4 - r^4}{R} \right) \dots (4)$$

Hier ist aber  $r = 0,7 R$ ,  $\sigma_r = c_r \cdot r$  und  $\sigma_R = c_R \cdot R$ , also folgt:

$$M_x = \sigma_R \frac{\pi}{4} R^3 \left[ 0,7^4 \left( \frac{c_r - c_R}{c_R} \right) + 1 \right] \dots \dots \dots (5)$$

Da aber  $\frac{c_r - c_R}{c_R} = \frac{E_k - E_s}{E_s} = 0,1$ , wird schliesslich

$$M_x = \sigma_R \frac{\pi}{4} R^3 \cdot 1,024 \dots \dots \dots (6)$$

Der Unterschied zwischen (6) und (3) ist nicht allzu gross. Um Bruch hervorzurufen bei zwei gleichen Bäumen, wovon der eine jedoch Kern hat, der andere nicht, ist im ersteren Falle 1,1 bis 1,0-mal so grosse Kraft erforderlich als im letzteren, je nachdem sich der Kernradius von  $R$  bis 0 bewegt. Der Einfluss auf die Form, welchen dieser Umstand hat, ist dann gleich Null, wenn der Kernradius immer ein beliebiges, aber bestimmtes Prozent des Stammradius beträgt. Nur wenn der Kernradius im Verhältnis zum Stammradius variiert, wird die Form beeinflusst.

Ist z. B. in einem Punkt des Stammes  $r = R$  und in einem dicht danebenliegenden Punkt  $r = 0$ , so ist im vorigen Punkt der Radius 3,1 % kleiner als im letzteren, wenn nämlich die Spannung  $\sigma_R$  beibehalten werden soll. Es können also schlechtenfalls recht beträchtliche Abweichungen dadurch entstehen, dass man den Elastizitätsmodul als konstant annimmt. In Wirklichkeit werden diese aber etwas kleiner, weil  $r$  immer  $< R$  ist. Besteht ein Unterschied zwischen  $E_k$  und  $E_s$  von der hier in Rechnung gezogenen Grösse, dürfte man jedoch im allgemeinen Abweichungen von ca. 1,0—2,0 % der Durchmesser zu befürchten haben.

Für die in dieser Untersuchung vorkommenden Stämme ist die aus dem Kern herfliessende Formverbesserung<sup>1</sup> praktisch ohne Bedeutung, denn der Unterschied des Wassergehalts zwischen Aussen- und Innenholz kann bei diesen Bäumen nicht so gross werden, dass der Elastizitätsmodul dadurch erheblich beeinflusst wird, und auch wenn dem so wäre, so ist die obenbesprochene Formverbesserung unzureichend, um die exzeptionelle Vollholzigkeit einer Anzahl der Probebäume erklären zu können. Steigt aber der Wassergehalt des Schaftes sehr stark von der Basis bis zum Gipfel, so dass auch das Aussenholz der Basis wasserärmer ist als das des Gipfels, so werden sowohl die Elastizitäts- als die Festigkeitsverhältnisse zu einer Formverbesserung zusammenwirken.

<sup>1</sup> Es muss sich ja fast immer um eine Formverbesserung handeln, da der Wassergehalt des Stammes mit der Höhe über dem Boden steigt und der Kern im allgemeinen gleichzeitig abnimmt.

In dieser Untersuchung habe ich mit einem konstanten Elastizitätsmodul von 100,000 kg/cm<sup>2</sup> gerechnet.

\*            \*            \*

Das spezifische Gewicht des Holzes wird im folgenden mit 0,80—0,90 angesetzt.

## KAP. V. Mechanische Grundlage.

Die mathematischen Auseinandersetzungen, die einen bedeutenden Raum in diesem Kapitel einnehmen, sind von fundamentaler Bedeutung für die Auffassung der mechanischen Theorie. Trotzdem es vielleicht scheinen kann, dass sie sich im Verhältnis zu den übrigen Kapiteln allzu breit machen, halte ich es doch für notwendig und zweckmässig, hier die wichtigsten derselben wiederzugeben. Einige der Berechnungen sind auch, soweit mir bekannt, nicht früher ausgeführt worden.

### Biegung.

In den folgenden Auseinandersetzungen werden dieselben Anfangsannahmen gemacht, die in der technischen Mechanik üblich sind. U. a. wird also angenommen, dass das Holz homogen und isotrop ist, zwei Forderungen, die begreiflicherweise in Wirklichkeit garnicht erfüllt sind. Man hat immerhin gefunden, dass trotzdem die meisten Formeln der Mechanik auch auf Körper aus Holz mit Erfolg angewandt werden können. Sofern nichts anderes gesagt wird, wird auch angenommen, dass alle Deformationen klein sind. Die Holzkörper, von denen in dieser Darstellung die Rede sein wird, denken wir uns im allgemeinen als stabförmig, und ihre zur Längsachse senkrechten Querschnitte werden auch nach der Biegung fortgesetzt als plan angenommen. Wenn nichts anderes gesagt wird, werden die Stäbe als gewichtslos betrachtet.

Ein gerader Stab mit kreisförmigem Querschnitt sei nun an dem einen Ende eingespannt, und auf das andere wirke eine zur Stabachse senkrechte Kraft ( $A$ ). Dadurch wird eine Biegung des Stabes hervorgerufen. Ausser den dabei entstehenden Normalspannungen treten auch tangentialen Spannungen auf, welche in diesem Falle mit den Quer- oder Schubspannungen gleichbedeutend sind, die aber doch vernachlässigt werden können.

Nach einigen ziemlich einfachen Überlegungen finden wir, dass die entstehenden peripherischen Normalspannungen ( $\sigma$ ) gemäss der Formel:

$$\sigma \cdot \frac{r_x}{r_x} = M_x \dots \dots \dots (7)$$

berechnet werden können, worin  $\mathcal{F}_x$  das mit dem Abstand vom freien Ende des Stabes variable Trägheitsmoment:  $\frac{\pi}{4} r_x^4$ , ferner  $r_x$  den Radius des Stabquerschnittes und  $M_x$  das Biegemoment bezeichnen. (7) gilt nicht nur für Biegung im engeren Sinne, sondern für jede Biegung überhaupt. Die Masseinheiten sind am besten für Längen: cm und für Kräfte: kg. Für Spannungen wird dann die Einheit = kg/cm<sup>2</sup>. Wird in (7) die Bedingung  $\sigma = \text{konstant} = s$  eingeführt, so erhält man, wenn  $\mathcal{F}_x$  durch  $\frac{\pi}{4} r_x^4$  und  $M_x$  durch  $A \cdot x$  (»Kraft  $\times$  Hebelarm«) ersetzt wird:

$$s \cdot \frac{\pi}{4} r_x^3 = A \cdot x \dots \dots \dots (8)$$

welche Gleichung die Meridiankurve des Trägers von gleichem Widerstande gegen Biegung wiedergibt.  $x$  ist hier der Abstand eines Querschnittes vom Angriffspunkt der Kraft oder deren Richtungslinie und  $A$  die wirkende Kraft. Offenbar gibt es auch andere Arten von Balken, die in ihren ganzen Längen in gleichem Masse bruchfest sind. Die Form des Balkens hängt ja nach (7) jedesmal davon ab, wie das Biegemoment  $M_x$  beschaffen ist. Der nach (8) definierte Balken ist bekanntlich das in der mechanischen Theorie so oft wiederkehrende kubische Paraboloid.  $s$  in (8) ist nichts anderes als die früher erwähnte Bruchfestigkeit der peripheren Teile des Balkenquerschnittes, d. h. betreffs wachsender Bäume, der peripheren Teile des Splintes.

Die *elastische Linie*, womit wir fernerhin viel zu tun bekommen, ist diejenige Linie, die im Biegungszustand von der Stabachse gebildet wird. Meistens können wir voraussetzen, dass die Biegung in einer Ebene stattfindet, und mit einer Verlegung des Koordinatensystems, wie in Fig. 7, wird dann die Gleichung der elastischen Linie geschrieben:

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_x}{\mathcal{F}_x E} \dots \dots \dots (9)$$

wo  $M_x$  = dem Biegemomente, gegeben durch eine oder mehrere nach Richtung und Grösse nicht näher definierte Kräfte, und  $E$  = dem Elastizitätsmodul des Holzes. Da wir die Annahme gemacht haben, dass die Biegung klein ist, so kann man  $\frac{dy}{dx}$  als annähernd = 0 annehmen, und aus (9) folgt dann approximativ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{\mathcal{F}_x E} \dots \dots \dots (10)$$

Diese Formel wird in der Folge oft benutzt werden. Sie ist aber, wie gesagt, nur annähernd richtig. Die Approximation bewirkt, dass diejenige Kraft, die erforderlich ist, um dem Stab einen gewissen Biegegrad zu erteilen, in Wirklichkeit kleiner ist, als wir sie mittels der

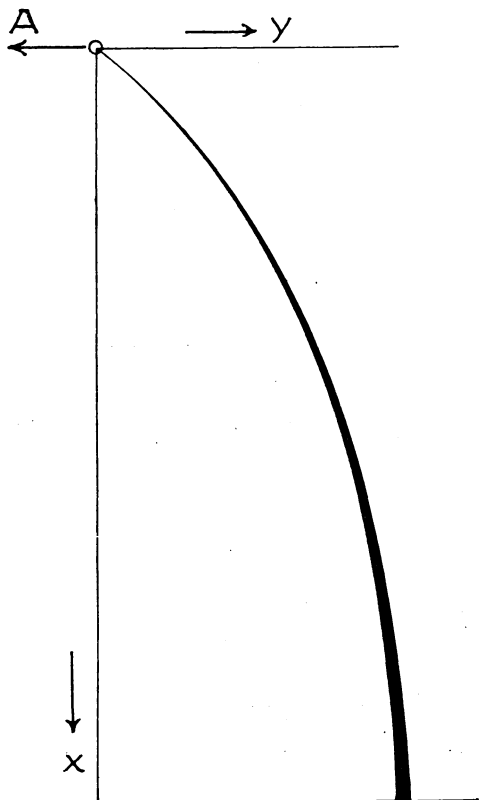


Fig. 7. Die Verlegung des Koordinatensystems bei Berechnung der elastischen Linie bei Biegung.

Koordinatsystemets förläggning vid beräkning av den elastiska linjen vid böjning.

Formel berechnen können. Eine Bestimmung der Grösse des Fehlers ist durch Lösung der Differentialgleichung (9) zu erhalten. Die Lösung ist ein elliptisches Integral erster Art und zeigt im Vergleich mit (10), dass die Approximation in der Regel nicht störend einwirkt. Bisweilen kann sie sich jedoch deutlich bemerkbar machen, und dies trifft ein, wenn der gebogene Stab im Verhältnis zum Querschnitte lang ist, d. h. z. B. für sehr langschäftige Bäume. Wie man leicht einsieht, können derartige Bäume, ehe der Bruch eintritt, so viel aus ihrer vertikalen Ruhelage herausgebogen werden, dass die Ableitung  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  der elastischen Linie nicht mehr  $= 0$  angenommen werden darf. Je grösser also das Formverhältnis  $\left(\frac{h}{d_{1,3}}\right)$  ist, desto schädlicher wirkt die Vereinfachung ein, die in (10) vorgenommen ist. Man kann dies im Walde daraus erkennen, dass ein Baum von gewissem Durchmesser und gewisser Länge oftmals von Schneedruck oder einem angefallenen Nachbarstamm weit mehr krummgebogen werden kann, als eine Berechnung mittels

(10) gestattet. Hierzu wirken aber auch andere Ursachen mit. Späterhin werden wir mit derartigen langen und schlanken Stämmen zu tun haben, auf welche wir (10) anwenden. (9) kann nicht gebraucht werden, weil die mathematischen Schwierigkeiten es nicht gestatten. Es ist daher von grossem Belang, sich den Fehler zu merken, der dadurch entsteht.

Wir nehmen künftighin an, dass die in Frage kommenden Stäbe vertikal eingespannt sind, dass das obere Ende, der Gipfel, frei, und dass die  $x$ -Achse des Koordinatensystems dem Lot parallel ist. Wenn der



Stab ein kubisches Paraboloid ist, und wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems in den Scheitel verlegt wird, so definiert die Gleichung:

$$r_x^3 = p \cdot x \dots \dots \dots (11)$$

die Meridiankurve des Paraboloids. Hier ist  $p = \frac{R^3}{l}$ , wo  $R$  = dem Basalradius des Stabes und  $l$  = der totalen Länge desselben ist. (10) liefert nun, wenn (11) darin eingesetzt wird, die Differentialgleichung für die elastische Linie des kubischen Paraboloids bei Biegung durch eine horizontal wirkende Kraft ( $A$ ). Wir können uns denken, dass diese Kraft dem Druck des Windes im Druckzentrum der Krone entspricht. Nach einigen einfachen Rechenoperationen erhält man die finite Gleichung der elastischen Linie in folgender Form:

$$y = \frac{6 A l^{\frac{4}{3}}}{E \pi R^4} \cdot x \cdot \left( l^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{5} x^{\frac{2}{3}} \right) \dots \dots \dots (12)$$

Für  $x = l$  berechnet man hieraus die grösste Ausbiegung ( $f$ ) des freien Endes des Stabes von der Ruhelage:

$$f = \frac{12 A l^3}{5 E \pi R^4} \dots \dots \dots (13)$$

### Knickung.

Berechnungen über Knickfestigkeit schliessen sich ungesucht an die mechanische Schaftformtheorie an. Die Bäume können ja mit Stäben verglichen werden, die an dem freien oberen Ende mit einem vertikal wirkenden Gewicht (die Krone) belastet sind. Das Gewicht ( $P$ ), das einen vertikal eingespannten Stab nur vermöge seiner Schwerewirkung zu biegen vermag, wird *die Knickbelastung* genannt. Die Bedingung dafür, dass eine derartige Biegung zustande kommen soll, ist, ausser dem Vorhandensein der Knickbelastung, auch eine unendlich kleine Abweichung der Stabachse von der Senkrechten. In Wirklichkeit ist diese Bedingung stets erfüllt. Wenn die Stabachse mathematisch exakt im Lot stände, wenn das Material des Stabes absolut homogen und die vertikal wirkende Kraft absolut zentrisch angebracht wäre, welch letzteres als stets zutreffend angenommen wird, so sollte der Stab nicht gebogen, sondern allmählich zerdrückt werden, wenn die Kraft einen hinreichend grossen Betrag erreicht hat. Das Knickungsproblem ist von mathematischem Gesichtspunkte aus schwierig, aber äusserst fesselnd, und es ist von besonderem Wert und Gewicht für eine klare Auffassung des mechanischen Schaftformproblems. Es ist bei weitem noch nicht durchgearbeitet, trotzdem die Literatur des Gebietes ziemlich reich ist. Da ich die weiter unten berechneten Formeln darin nicht angetroffen habe, habe ich es

für angezeigt gehalten, über ihre Deduktion ziemlich ausführlich zu berichten.

Die klassischen Formeln, nach welchen das Knickungsproblem meistens behandelt wird, sind für uns unzureichend, weil wir mit sich verjüngenden Stäben zu tun haben. Aus Fig. 8 wird die Verlegung des Koordinaten-

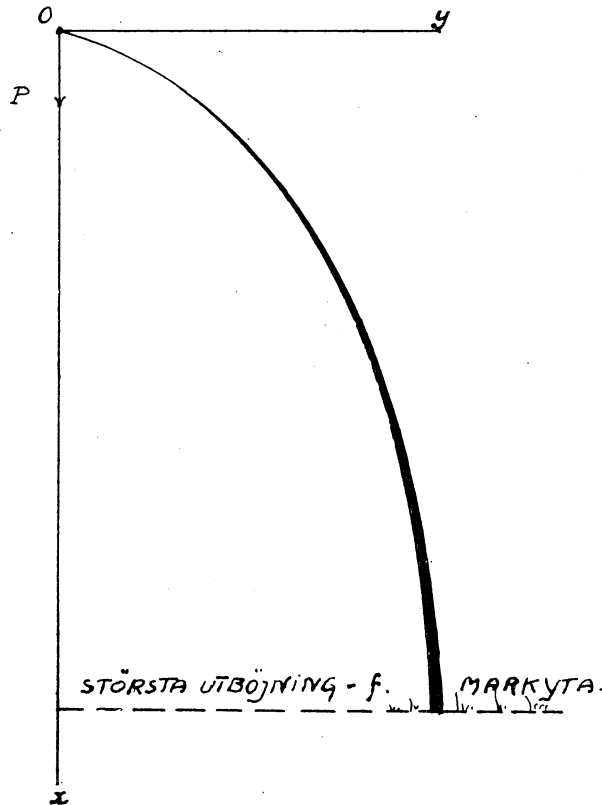


Fig. 8. Die Verlegung des koordinatensystems bei Berechnungen über Knickung.

Koordinatsystemets förläggning vid avknäkningsberäkningar.

systems ersichtlich. Nach (10) wird die Differentialgleichung der elastischen Linie geschrieben:  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_x}{E\mathcal{F}_x}$ . In diesem Falle wird  $M_x = -P \cdot y$

und wir erhalten:  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P \cdot y}{E\mathcal{F}_x}$ .<sup>1</sup> Wenn der Stab ein kubisches Para-

boloid ist, so ist, wie vorher gesagt:  $r_x^3 = \frac{R^3}{l} \cdot x$  und  $\mathcal{F}_x = \frac{\pi}{4} \left( \frac{R^3}{l} x \right)^{\frac{4}{3}}$ .

<sup>1</sup> Wir setzen ein Minuszeichen von dem Biegemoment ein um die Ordinaten der elastischen Linie positiv zu erhalten.

Wird dieser Wert in die ebengenannte Differentialgleichung eingesetzt, und wird wieder  $\frac{4 P l^{\frac{4}{3}}}{E \pi R^4} = b$  und  $-\frac{4}{3} = m$  gesetzt, so vereinfacht sich diese, und man erhält schliesslich:  $\frac{d^2 y}{dx^2} + b x^m y = 0$ .

Diese Gleichung kann man in eine Reihe nach steigenden Potenzen von  $x$  entwickeln, und  $y$  kann aus ihr berechnet werden. Diese Reihe hat aber einen besonderen Namen. Sie bildet einen Spezialfall der BESSEL'schen Funktion oder der Zylinderfunktionen, welche aber im voraus berechnet und tabuliert zu finden sind (JAHNKE-EMDE, 1923). Die Zylinderfunktionen, die hier in Frage kommen, werden im allgemeinen mit dem Symbol  $J$  bezeichnet.

Unter Verwendung dieses Symbols gestaltet sich die Lösung der fraglichen Differentialgleichung folgendermassen:

$$y = B \cdot \sqrt{x} \cdot J_{\frac{3}{2}}(3\sqrt{b} x^{\frac{3}{2}}) \dots \dots \dots (14)$$

In (14) bedeuten  $B$  und  $b$  Konstanten, die gewisse Zahlenwerte sowie  $P$  und  $l$  enthalten.  $J_{\frac{3}{2}}$  bedeutet die Zylinderfunktion erster Art, Parameter  $\frac{3}{2}$ .

Die Gleichung (14) definiert aber noch nicht die elastische Linie des kubischen Paraboloids. Von dieser wissen wir nämlich, dass im Punkte  $x = l$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  sein soll. Dies bedeutet mit anderen Worten, dass die Konstante  $b$  so bestimmt werden muss, dass die Gleichung  $\frac{dy}{dx} = 0$  durch den Wert  $x = l$  befriedigt wird. Aus dieser Bedingung wird  $b$  bestimmt.  $b$  enthält andererseits  $P$ , welche letztere Grösse also auch bestimmt wird. Dieser Wert von  $P$  ist = der Knickbelastung. (14) ist nicht möglich, ehe  $P$  diesen Wert erreicht hat, d. h. zuvor findet überhaupt keine Biegung statt, wenn er aber anderseits erreicht ist, wird auch der Stab bis zum Bruch gebogen. Dies stimmt nicht mit der Erfahrung überein, denn es zeigt sich aus Versuchen, dass der Stab für eine gewisse Belastung wohl gebogen wird, aber nicht mehr als bis zu einer gewissen Grenze, wo Gleichgewicht eintritt. Die Erhöhung von  $P$ , die in Wirklichkeit hinzugefügt werden muss, um Bruch hervorzurufen, ist jedoch ziemlich klein, und wir brauchen vorläufig keine spezielle Rücksicht darauf zu nehmen.

Wir können nun mehrere Gleichungen aufstellen, die mit (14) analog sind, und die für verschiedenartig parabolisch geformte Stäbe gelten, deren Meridiankurve durch die Gleichung  $r_x^n = p x$  definiert ist. Es zeigt

sich, dass die Spannung  $\sigma$ , die nach (7) berechnet werden kann, für keinen dieser Stäbe konstant wird, d. h. keiner von ihnen ist ein Träger von gleichem Widerstande gegen Knickung.

Die Form dieses Stabes zu kennen hat jedoch ein hohes Interesse. Sie lässt sich auch sehr einfach berechnen. Nach (7) haben wir nämlich:  $\sigma = \frac{M_x \cdot r_x}{\mathcal{F}_x}$  und nach (10):  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_x}{E \mathcal{F}_x}$ . Aus diesen beiden Gleichungen wird  $r_x$  eliminiert. Wird danach der Wert  $M_x = -P \cdot y$  eingesetzt, und setzt man noch  $\sigma = \text{Konst.} = s$ , so erhält man die elastische Linie des Trägers aus der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{y^{\frac{1}{3}}} = 0 \dots \dots \dots (15)$$

wo  $a = \frac{\pi^{\frac{1}{3}} \cdot s^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} \cdot E P^{\frac{1}{3}}}$ . Nach einigen elementaren Rechenoperationen erhält man die finite Lösung:

$$x = \frac{3}{2\sqrt{3}} a^{-\frac{1}{2}} \left\{ f^{\frac{2}{3}} \cdot \arcsin \left( \frac{y}{f} \right)^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} \sqrt{f^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

Hier bedeutet  $f$  die grösste Durchbiegung. Durch Einführung der Bedingung:  $\frac{dy}{dx} = 0$  für  $x = l$  wird die Knickbelastung bestimmt. Da nun nach (16)  $y$  bekannt ist, so kennt man auch  $M_x = -P \cdot y$ , und nach (7) ist dann  $r_x$  leicht zu berechnen. Man findet, dass der Träger von gleichem Widerstande gegen Knickung einen Formquotienten von etwa 0,915 hat. Man bemerkt auch, dass  $\frac{dr_x}{dx} = 0$  für  $x = l$ . Der Träger von gleichem Widerstande gegen Knickung hat folglich die in Fig. 10 angegebene Form.<sup>1</sup>

Da es bisweilen von gewissem Interesse sein kann, die Knickbelastung berechnen zu können, werden hier einige Formeln zu diesem Zwecke mitgeteilt:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Kubisches Paraboloid:} & P = \frac{1}{9} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \mathcal{F}_l E \\ \text{Träger von gleich. Widerst. gegen Knickung:} & P = \frac{3}{16} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \mathcal{F}_l E \\ \text{Zylinder:} & P = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \mathcal{F}_l E \end{array} \right\} \quad 1$$

$\mathcal{F}_l$  ist hier das Trägheitsmoment im Punkte  $x = l$ , d. h. an der Basis des Stabes.

<sup>1</sup> Vgl. M. DE LA GRANGE, Misc. Taur. 1773, der eine andere Form gefunden hat.

### Das Eigengewicht des Stabes.

Die oben gemachte Annahme, dass das Eigengewicht des Stabes vernachlässigt wird, kann nicht aufrechterhalten werden, wenn der Stab sehr lang im Verhältnis zur Dicke wird. Wenn die sog. *kritische Länge* erreicht ist, wird der Stab durch sein Eigengewicht gebogen. Die Berechnung der kritischen Länge ist ein Gleichgewichtsproblem derselben Art, wie das in der vorherigen Abteilung besprochene Knickungsproblem. Aus besonderen Gründen wird jetzt das Koordinatensystem gemäss Fig. 9 verlegt. Wenn wir annehmen, dass der Stab ein kubisches Paraboloid ist, so ist  $r_x^3 = \frac{R^3}{l} x$ , und da  $W_x$  das Gewicht des Stabes bezeichnet,  $W_x = w \frac{3}{5} \pi \frac{R^2}{l^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{5}{2}}$ , wo  $w$  = dem spez. Gewichte (in kg/cm<sup>3</sup>) des Holzes ist. Werden mit  $(x', y')$  die Koordinaten eines beliebigen Punktes oberhalb des Punktes  $(x, y)$  (vgl. Fig. 9) bezeichnet, so erhält man nach (10):

$$E\mathcal{F}_x \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x (y' - y) \frac{dW_{x'}}{dx'} dx' \quad \dots (18)$$

Hier setzen wir  $\frac{dy}{dx} = p$  und also  $\frac{d^2 y}{dx^2} =$

$= \frac{dp}{dx}$ . Nach Differentiation von (18)

hinsichtlich  $x$  erhält man:

$$\frac{1}{4} \pi E \cdot \frac{d \left( r_x^4 \frac{dp}{dx} \right)}{dx} = -p W_x,$$

worin  $r_x$  und  $W_x$  durch die aus Vorstehendem bekannten Ausdrücke ersetzt werden. Schliesslich erhält man hieraus die Lösung:

$$p = C \cdot x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}} \left( \frac{6}{7} \sqrt{b} x^{\frac{3}{2}} \right), \quad \dots \dots \dots (19)$$

wo  $C$  und  $b$  Konstanten sind, die, ausser gewissen Zahlenwerten, die Länge  $l$  enthalten. Ebenso wie in der vorhergehenden Abteilung die

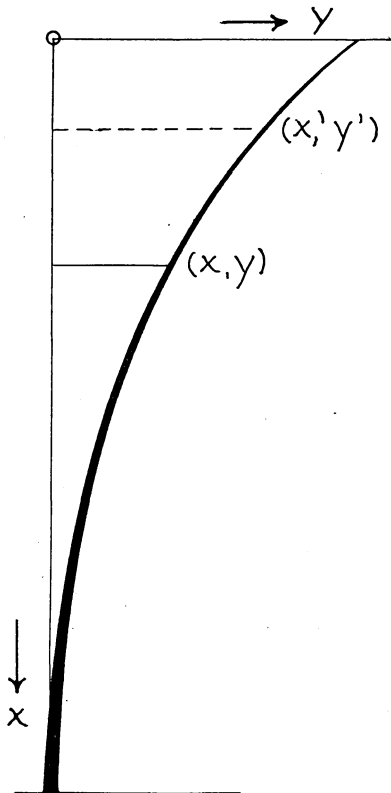


Fig. 9. Die Verlegung des Koordinatensystems bei Berechnungen über die Knickwirkung des Eigengewichtes.  
Koordinatsystemets förläggning vid beräkning av avknäckning genom egenvikten.

Knickbelastung  $P$  durch die Bedingung  $\frac{dy}{dx} = 0$  für  $x = l$  bestimmt wurde, so wird hier die kritische Länge ( $L$ ) dadurch bestimmt, dass man (19) = 0 für  $x = L$  setzt. Auf diese Weise erhält man:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{für einen geraden Kegel} & L = 1,97 \cdot \left( \frac{ER^2}{w} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{» ein appoll. Paraboloid} & L = 1,70 \cdot \left( \frac{ER^2}{w} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{» ein kub. Paraboloid} & L = 1,575 \cdot \left( \frac{ER^2}{w} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \text{» einen Zylinder} & L = 1,26 \cdot \left( \frac{ER^2}{w} \right)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right\} \dots (20)$$

In einer Arbeit von A. G. GREENHILL (1881) findet man u. a. die spezielle Lösung für den Zylinder angegeben und überdies die allgemeine Lösung für parabolische Rotationskörper. Für den Fall aber, dass der Stab kein solcher ist, gibt es z. Z. keine analytische Lösung. Es trifft sich aber zuweilen, dass man Interesse daran hat, die kritische Länge eines Stabes zu berechnen, der nicht parabolisch ist, oder dessen Eigengewicht oder längs des ganzen Stabes ausgebreitete Belastung von dessen Form nicht abhängt. Ein derartiger Fall ist z. B. die Berechnung der Schneebelastung, die eine langkronige Fichte tragen kann. Für diese Fälle kann eine graphische Methode mit Vorteil angewandt werden. Eine solche soll hier in Verbindung mit der Berechnung des Trägers von gleichem Widerstande gegen das Eigengewicht kurz beschrieben werden.

Wir versuchen dabei zuerst eine annähernd richtige Kurve für  $M_x$  zu finden. Weil wir in der Tat sehr wenig davon wissen, wie sich diese Kurve gestaltet, so stellen wir zuerst die folgende Untersuchung an. Auf Grund der vorher erwähnten allgemeinen Formel für parabolische Rotationskörper berechnen wir die elastische Linie einiger solchen. Daraus erhält man die betr.  $M_x$  und aus (7) ferner das Bruchrisiko  $\sigma$ . Wenn dieses in ein Koordinatensystem graphisch eingetragen wird, so zeigt es sich, dass das Paraboloid  $r_x^{\frac{4}{3}} = px$  ein Bruchrisiko aufweist, das in der Nähe des Scheitels beinahe konstant ist. Wir schliessen daraus, dass der Träger in der Scheitelpartie schwach konvex gegen die Achse sein dürfte. Nach (7) haben wir ferner:  $s \frac{\pi}{4} r_x^3 = M_x$  oder nach Differentiation hinsichtlich  $x$ :

$$s \frac{\pi}{4} 3 r_x^2 \cdot \frac{dr_x}{dx} = \frac{dM_x}{dx} = - \frac{dy}{dx} W_x.$$

Im Punkte  $x = l$  ist ja  $\frac{dy}{dx} = 0$ , und da  $W_l$  und  $r_l$  beide endlich sind, so muss folglich auch  $\frac{dr_x}{dx} = 0$  im Punkte  $x = l$  sein. Wir können also eine Kurve zeichnen, von der wir behaupten können, dass sie einigermaßen genau die Form des Trägers von gleichem Widerstande wiedergibt. (Fig. 10.)

Wir haben nun die zwei Gleichungen:  $\sigma \frac{\pi}{4} r_x^3 = M_x$  und

$$E \frac{\pi}{4} r_x^4 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M_x \dots \dots \dots (21a)$$

Wird  $M_x$  aus ihnen eliminiert, erhält man:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{s}{E} \cdot \frac{1}{r_x} \dots \dots \dots (21b)$$

worin durch Austausch von  $\sigma$  gegen  $s$  (= Konst.) angedeutet wird, dass (21 b) nur für einen Träger von gleichem Widerstande gültig ist. Allgemein gilt die Gleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1}{r_x} \dots \dots \dots (21c)$$

wo  $\sigma$  also variabel ist.

Es muss nun immer möglich sein, eine beliebige Kurve für  $M_x$  zu wählen, die für ein gegebenes  $r_x$  gemäss (21 a) eine dazu gehörige elastische Linie gibt. Wird auf Grund dieser elastischen Linie und des gegebenen  $r_x$  das durch das Eigengewicht erzeugte  $M_x$  berechnet, erhalten wir nach (7) gewisse Werte des  $\sigma$ , die sicher nicht konstant sind.

Aus (21 b) erhalten wir auch für gegebene  $r_x$  eine elastische Linie, die jedoch nur für einen Träger von gleichem Widerstande gilt. Stimmen diese beiden elastischen Linien überein, und ist ferner das erstgewählte  $M_x$  so beschaffen, dass es, aus den übereinstimmenden elastischen Linien und den gegebenen  $r_x$  berechnet, nicht verändert wird, dann ist die elastische Linie des Trägers von gleichem Widerstande gegen Knickung durch das Eigengewicht und dessen Dimensionen gefunden.

Es lassen sich wirklich, jedoch durch mühsame Arbeit,  $r_x$  und  $M_x$  so wählen, dass diese Forderungen annähernd erfüllt werden. Die  $r_x$ , also die Dimensionen des Trägers von gleichem Widerstande gegen Knickung durch das Eigengewicht, sind in Fig. 10 durch eine gestrichelte Linie wiedergegeben.

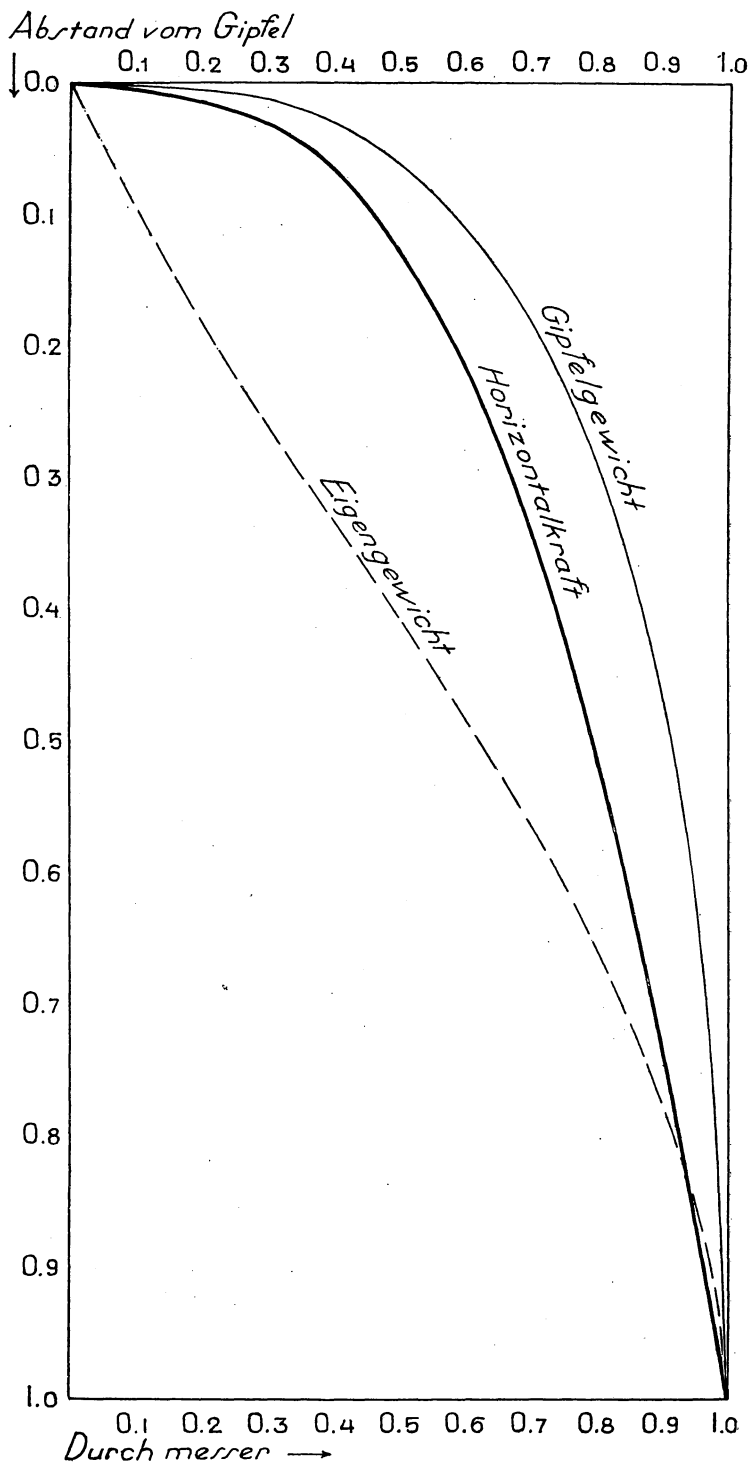


Fig. 10. Träger von gleichem Widerstande gegen Knickung durch ein Gipfelgewicht, gegen Biegung und gegen Knickung durch das Eigengewicht.

Mot olika slag av kraftpåkänning jämnstarka bjälkar. Helledragen fin linje betyder bjälke, jämnstark mot avknäckning av toppvikt; helledragen grov linje betyder bjälke, jämnstark mot böjning av en horisontalt verkande kraft; Streckad linje betyder bjälke, jämnstark mot avknäckning av egenvikten.



## Torsion.

Nur in allergrösster Kürze soll hier etwas über die Torsion der Bäume bemerkt werden. Das Torsionsproblem kann nicht vollständig objektiv behandelt werden, weil unsre vorher gemachte Annahme betreffs der homogenen und isotropen Eigenschaften des Holzes jetzt unhaltbar ist. Alle bisher erwähnten Spannungen sind Normalspannungen gewesen, d. h. sie haben senkrecht zum Querschnitte gewirkt, und die Eigenschaften des Holzes in anderen Richtungen sind dann auch recht bedeutungslos gewesen. Bei Torsion, die mit Biegung kombiniert ist, was immer in betreff wachsender Bäume der Fall ist, entstehen aber, ausser Normalspannungen, auch Tangentialspannungen. Die Struktur des Holzes macht sich jetzt bemerkbar, u. a. dadurch, dass die sog. POISSON'sche Zahl ( $m$ ) nicht bestimmt werden kann. Die Versuche, die Verf. mit Torsion zylindrischer Probestücke aus frischem Holze ausgeführt hat, haben absurde  $m$ -Werte ergeben. Aus den Formeln, die für Torsionsberechnungen gegeben sind, kann man jedoch den Schluss ziehen, dass der Träger von gleichem Widerstande nur gegen Torsion ein Zylinder sein muss. Wenn also Biegung ( $A$ ) und Torsion ( $T$ ) kombiniert werden, so muss der Träger von gleichem Widerstande gegen die kombinierte Beanspruchung eine Form haben, welche zwischen der des kubischen Paraboloids und des Zylinders liegt. Torsionsspannungen dürften also eine Formverbesserung bewirken.

Es zeigt sich nun in der Tat, dass Bäume mit erheblich exzentrischen Kronen sehr oft eine Form haben, die bedeutend voller ist als die für die betr. Bäume berechneten kubischen Paraboloiden. Die Formverbesserung, die also eingetreten ist, könnte vielleicht als ein Resultat der Torsionsspannungen gedeutet werden. Ich habe Bäume untersucht, deren Kronen aus einem einzigen, am obersten Ende des Schaftes wagerecht herausragenden Ast bestanden, und es hat sich herausgestellt, dass ihre Dimensionen am Stamme, eben am Ausgangspunkte des Astes, beträchtlich grösser gewesen sind als der Basaldurchmesser des Astes selbst, und der Zuwachs, der in Bruthöhe oft minimal gewesen ist, ist am Gipfel des Schaftes kräftig, am Aste dagegen geringer gewesen. Beeinflussung durch Torsionsspannungen erklärt dies alles. Die Transpirationstheorie kann dagegen nicht erklären, z. B. warum die Schaftdimensionen und der Zuwachs am Schaftgipfel grösser sind als an der Astbasis, und auf dem heutigen Standpunkte der Physiologie kann dies auch nicht im Lichte des Assimilationsprozesses und des Nahrungstransports verstanden werden. In der Torsionsfrage beweisen jedoch die hier erwähnten, eigentümlichen Bäume nichts, denn man kann den Verdacht nicht aus-

schliessen, dass ihre wunderbare Kronengestalt einmal durch äussere Gewalt bewirkt wurde, worauf Gleichgewicht nie eingetreten ist.

Auch andere Bäume mit exzentrischen Kronen, an welchen Spuren derartiger Gewalt nicht zu beobachten sind, zeigen aber eine bessere Form als gewöhnliche Bäume. Diese Fälle können jedoch zumeist auch vom Gesichtspunkte der beiden übrigen Theorien aus erklärt werden, also als Resultate veränderter Transpirations- und Assimilationsverhältnisse. Ich möchte hier die Aufmerksamkeit auf den frappanten Parallelismus zwischen den drei Gesichtspunkten lenken, von denen aus das Schaftformproblem betrachtet werden kann. Er macht sich unaufhörlich bemerkbar.

### Druck.

Bei einem aufrechtstehenden Baum in Ruhe wie im Biegunszustande wirken die Gewichte der Krone und des Schaftes als vertikale Druckkräfte, die dahin streben, den Schaft zu zerquetschen. Diese Art von Beanspruchung ist durchaus nicht mit den vorher behandelten Bieguings- und Knickbeanspruchungen identisch. Wenn der Baum senkrecht steht, kommen nur Normalspannungen vor, wird er gebogen, treten auch Tangentialspannungen auf. Diese Spannungen sind in den allermeisten Fällen sehr klein im Verhältnis zu den Bieguings- und den Knickspannungen, und sie können, wie oben erwähnt, ausser Rechnung gelassen werden. Die Auffassung der forstlichen, mechanischen Probleme, die W. HOHENADL (1922) vertreten hat, ist unhaltbar, weil der Baum, wenn er überhaupt auf mechanische Spannungen reagiert, nicht hauptsächlich von den schwächsten Spannungen beeinflusst werden und von den stärkeren unbeeinflusst bleiben kann.<sup>1</sup>

### Kombination von Bieguings- und Knickspannungen.

Ein wachsender Schaft wird im Sturme zugleich von Bieguings- und von Knickbeanspruchungen beeinflusst. Ausserdem kommen theoretisch tangentielle Spannungen durch eventuelle Torsion usw. hinzu, die wir aber hier unberücksichtigt lassen. Je schlanker die Bäume sind, um so grösseren Einfluss haben die Knickspannungen. Eine Untersuchung über die mechanischen Verhältnisse dichtgeschlossener Bestände, in denen die Schlankheit der Stämme oft erstaunlich ist, kann also nicht ausgeführt werden, ehe die recht schwierige Frage von der Kombination der drei Spannungsarten klargestellt worden ist. Oben erwies es sich als unmöglich, bis auf weiteres eine analytische Lösung des Problems des Trägers von gleichem Widerstande gegen das Eigengewicht zu geben.

<sup>1</sup> Die Dauer des Reizes könnte hier vielleicht auch eine Rolle spielen, auf die H. aber meines Wissens nicht hingedeutet hat. Auf eine nähere Kritik kann ich hier leider nicht eingehen.

Wir müssen daher auch auf eine vollständige, analytische Behandlung des kombinierten Problems verzichten. Wir können aber, mit nicht allzu groben Approximationen, wenigstens eine ziemlich gute Auffassung davon folgendermassen erhalten.

Das Koordinatensystem wird wie in Fig. 9 verlegt. Nach (10) erhält man, da  $p = \frac{dy}{dx}$  und  $\frac{dp}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$  ist:

$$E \frac{\pi}{4} r_x^4 \cdot \frac{dp}{dx} = \int_0^x (y' - y) \frac{dW_x'}{dx'} dx' + P(f - y) + Ax \dots$$

Sämtliche in (22) eingehenden Grössen sind früher definiert. (22) wird hinsichtlich  $x$  differenziert, und man erhält:

$$E \frac{\pi}{4} \frac{d(r_x^4 \frac{dp}{dx})}{dx} = -pW_x - Pp + A \dots \dots \dots (23)$$

Wenn nun  $r_x^3 = \frac{R^3}{l} x$ , d. h. wenn der Stab ein kubisches Paraboloid ist, so ist  $r_x^4 = k^{\frac{4}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$ , wo  $\frac{R^3}{l}$  mit  $k$  bezeichnet wird. Ferner ist  $W_x = \frac{3}{5} \frac{w\pi k^{\frac{2}{3}}}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}}$ . Diese Werte werden in (23) eingesetzt,  $\frac{dp}{dx}$  wird mit  $p'$  und  $\frac{d^2p}{dx^2}$  mit  $p''$  bezeichnet. Nach einigen Rechnungen erhält man:

$$x^{\frac{4}{3}} p'' + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} p' + \left[ \frac{3 \cdot 4}{5} \frac{w\pi k^{\frac{2}{3}}}{E\pi k^{\frac{4}{3}}} \cdot x^{\frac{5}{3}} + \frac{4P}{E\pi k^{\frac{4}{3}}} \right] p - \frac{4A}{E\pi k^{\frac{4}{3}}} = 0 \dots \dots (24)$$

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{3 \cdot 4}{5} \frac{w\pi k^{\frac{2}{3}}}{E\pi k^{\frac{4}{3}}} = \beta; \quad \frac{4P}{E\pi k^{\frac{4}{3}}} = \gamma; \quad \frac{4A}{E\pi k^{\frac{4}{3}}} = \delta \dots \dots \dots (25)$$

(22) wird alsdann geschrieben:

$$x^{\frac{4}{3}} p'' + \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} p' + \left[ \beta x^{\frac{5}{3}} + \gamma \right] p - \delta = 0 \dots \dots \dots (26)$$

Diese lineare, unverkürzte Differentialgleichung zweiter Ordnung wird gemäss dafür gegebenen Regeln verkürzt, wonach man erhält:

$$x^3 p''' + x^2 \frac{8}{3} p'' + x \left[ \frac{4}{9} + \gamma x^{\frac{2}{3}} + \beta x^{\frac{5}{3}} \right] p' + \frac{5}{3} \beta x^{\frac{2}{3}} p = 0 \dots (27)$$

Von einem Beweis für die Existenz einer konvergenten, nach steigenden Potenzen von  $x$  fortschreitenden Lösung von (27) muss hier ab-

gesehen werden. Wir finden, nach Reihenentwicklung von (27), dass sich die erste primäre Reihe in mehrere Sekundärreihen zerlegen lässt. Einige von ihnen können auf bekannte Funktionen zurückgeführt werden, andere müssen in Reihenform bleiben. Als Endformel ergibt sich, wenn die Koeffizienten in Dezimalbrüchen ausgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
 p = a_0 \left\{ \left[ \frac{\sin(3 \sqrt{\gamma} \cdot x^{\frac{1}{3}})}{3 \sqrt{\gamma} \cdot x^{\frac{1}{3}}} + \frac{\Pi(\frac{1}{7})}{(\frac{3}{7} \sqrt{\beta})^{\frac{1}{7}}} \cdot x^{-\frac{1}{6}} J_{\frac{1}{7}}(\frac{6}{7} \sqrt{\beta} \cdot x^{\frac{1}{3}}) - 1 \right] \dots = I' \right. \\
 + [0,16607 \gamma \beta x^{\frac{2}{3}} - 0,05735 \gamma^2 \beta x^{\frac{11}{3}} + 0,0099865 \gamma^3 \beta x^{\frac{18}{3}} - \dots] \dots = I'' \\
 \left. - [0,005723 \gamma \beta^2 x^{\frac{16}{3}} - \dots] \dots = I''' \right. \\
 - \left[ \frac{\partial}{\gamma} \cdot \frac{\sin(3 \sqrt{\gamma} \cdot x^{\frac{1}{3}})}{3 \sqrt{\gamma} \cdot x^{\frac{1}{3}}} - \frac{\partial}{\gamma} \right] \dots = S' \\
 - [0,15 \beta \delta x^{\frac{2}{3}} - 0,004963 \beta^2 \delta x^{\frac{16}{3}} + 0,00008092 \beta^3 \delta x^{\frac{28}{3}} - \dots] \dots = S'' \\
 + [0,05625 \gamma \beta \delta x^{\frac{11}{3}} - 0,009934 \gamma^2 \beta \delta x^{\frac{18}{3}} + \dots] \dots = S''' \\
 \text{etc. ad inf.} \dots \dots \dots (28)
 \end{aligned}$$

Die einzigen neuen Bezeichnungen in (28) sind:  $\Pi$  = die Gammafunktion und  $a_0$  = eine Konstante. Die verschiedenen Glieder der Gleichung werden, wie oben angedeutet, mit  $I'$ ,  $I''$ ,  $I'''$  und  $S'$ ,  $S''$ ,  $S'''$  bezeichnet. Die Gleichung (28) kann man jetzt schreiben:

$$p = a_0 (I' + I'' + I''') + S' + S'' + S''' \dots \dots \dots (29)$$

Es gilt  $p = \frac{dy}{dx} = 0$  für  $x = l$ . Wird daher in (29) der Wert  $x = l$  eingesetzt, wobei durch  $I_l$ ,  $S'_l$  usw. angegeben wird, dass diese Operation ausgeführt ist, so erhält man:

$$a_0 = - \frac{S'_l + S''_l + S'''_l}{I_l + I''_l + I'''_l} \dots \dots \dots (30)$$

Aus (30) ist  $a_0$  zu berechnen und der Wert in (28) einzusetzen.

Nach (25) bezeichnen die Konstanten  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  die Beeinflussung von  $p$ , die verursacht wird durch bzw. das Schafteigengewicht, das Kronengewicht und den Winddruck. Setzt man eine oder zwei von ihnen gleich Null, so erhält man aus (28) diejenigen Gleichungen, die für den so vereinfachten Fall gelten (siehe unten).

Dieselbe Berechnung, die soeben für das kubische Paraboloid skizziert worden ist, wird auch für einen Zylinder ausgeführt. Man hat nun:

$$\beta = \frac{4 w}{E R^2}; \gamma = \frac{4 P}{E \pi R^4}; \delta = \frac{4 A}{E \pi R^4} \dots \dots \dots (31)$$

Nach durchgeführter Rechnung findet man:

$$\begin{aligned}
 p &= a_0 \left\{ \left[ \cos \sqrt{\gamma} \cdot x + \frac{\Pi(-\frac{1}{3}) \sqrt{x}}{(\frac{1}{3} \sqrt{\beta})^{-\frac{1}{3}}} \cdot J_{-\frac{1}{3}} \left( \frac{2}{3} \sqrt{\beta} x^{\frac{3}{2}} \right) - 1 \right] \dots = I' \right. \\
 &+ [0,03333 \beta \gamma x^5 - 0,001785 \beta \gamma^2 x^7 + 0,0000441 \beta \gamma^3 x^9 - \dots] \dots = I'' \\
 &\quad \left. - [0,000695 \beta^2 \gamma x^8 - \dots] \right\} \dots = I''' \\
 &\quad - \left[ \frac{\partial}{\gamma} \cos \sqrt{\gamma} \cdot x - \frac{\partial}{\gamma} \right] \dots = S' \\
 &\quad - [0,025 \beta \delta x^5 - 0,0004464 \beta^2 \delta x^8 \dots] \dots = S'' \\
 &\quad + [0,001587 \beta \gamma \delta x^7 \dots] \dots = S''' \\
 &\quad \text{etc. ad inf.} \dots (32)
 \end{aligned}$$

In (28) und (32) kann eine oder zwei der Konstanten  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta = 0$  gesetzt werden, wodurch sich eine Gleichung ergibt, die für den einfacheren Fall gilt, dass entweder das Schaftengewicht, das Gipfelgewicht oder die Horizontalkraft vernachlässigt werden kann. Setzt man zwei der Konstanten  $= 0$ , so erhält man z. B. für ein kubisches Paraboloid irgendeine der oben gegebenen Gleichungen (12), (14) oder (19), je nachdem  $\beta$  und  $\gamma$ ,  $\beta$  und  $\delta$  oder  $\gamma$  und  $\delta = 0$  sind. Eine nähere Erörterung dieser Spezialfälle dürfte überflüssig sein. Wünscht sich der Leser selbst von der Sache zu überzeugen, so will ich hier nur bemerken, dass:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\gamma} \cdot \frac{\sin(3 \sqrt{\gamma} x^{\frac{1}{3}})}{3 \sqrt{\gamma} x^{\frac{1}{3}}} - \frac{\partial}{\gamma} \right] = \frac{3}{2} \delta x^{\frac{2}{3}}$$

sowie

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial}{\gamma} \cdot \cos \sqrt{\gamma} x - \frac{\partial}{\gamma} \right] = \frac{\delta}{2} x^2,$$

was man durch Reihenentwicklung der beiden obenstehenden Ausdrücke leicht findet. Ferner sind die Ausdrücke in (28) und (32), welche die Zylinderfunktionen  $J_{\frac{1}{3}}$  und  $J_{-\frac{1}{3}}$  enthalten, für  $\lim \beta = 0$  beide  $= 1$ , und

ausserdem ist für  $\lim \gamma = 0$ :  $\frac{\sin(3 \sqrt{\gamma} x^{\frac{1}{3}})}{3 \sqrt{\gamma} x^{\frac{1}{3}}} = 1$ .

In den beiden Gleichungen (28) und (32) kommen Zylinderfunktionen der Parameter  $+\frac{1}{3}$  und  $-\frac{1}{3}$  vor. Tafeln für diese Ordnungen sind aber meines Wissens nicht publiziert. Um Rechnungen ohne allzu umfangreiche Arbeit zu ermöglichen, mögen daher derartige Tafeln hier mitgeteilt werden.

In JAHNKE-EMDE, Funktionentafeln usw., S. 90 finden wir die Formel:

$$J_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{1}{p}x\right)^{p+2\nu}}{\nu! \Pi(p+\nu)}.$$

Hier ist  $\nu$  successive durch alle ganzen Zahlen von 0 bis  $+\infty$  zu ersetzen und  $p$  die Werte  $+\frac{1}{p}$  bzw.  $-\frac{1}{p}$  zu geben. Man erhält auf diese Weise zwei Reihen. Hieraus werden die Werte der Zylinderfunktionen für verschiedene  $x$ -Werte berechnet. Die Methode ist nicht besonders zuverlässig, weil die Reihen für gewisse  $x$ -Werte sehr langsam konvergieren. Durch graphische Interpolation können wir aber für unsren Zweck völlig genügende Ziffern erhalten.

Tab. 3.

 $\Pi\left(\frac{1}{p}\right) = 0,935 \dots$ 

$x$	$J_{\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{\frac{1}{p}}(x)$
0,00	+ 0,000	0,20	+ 0,763	0,60	+ 0,831(2)	1,10	+ 0,740	1,65	+ 0,511	2,20	+ 0,224
0,02	0,554	0,25	0,784	0,62	0,830(4)	1,15	0,723	1,70	0,487	2,25	0,198
0,03	0,587	0,30	0,799	0,65	0,828	1,20	0,706	1,75	0,461	2,30	0,170
0,04	0,613	0,35	0,810	0,70	0,824	1,25	0,688	1,80	0,435	2,35	0,146
0,05	0,634	0,40	0,819	0,75	0,818	1,30	0,669	1,85	0,409	2,40	0,118
0,06	0,650	0,45	0,826	0,80	0,812	1,35	0,650	1,90	0,384	2,45	0,092
0,07	0,663	0,50	0,830(1)	0,85	0,803	1,40	0,628	1,95	0,357	2,50	0,065
0,08	0,675	0,52	0,830(9)	0,90	0,793	1,45	0,607	2,00	0,330	2,55	0,040
0,09	0,686	0,54	0,831(5)	0,95	0,782	1,50	0,583(5)	2,05	0,304	2,60	+ 0,012
0,10	0,695(6)	0,56	0,831(7)	1,00	0,768(8)	1,55	0,560	2,10	0,277	2,65	— 0,014
0,15	0,736	0,58	0,831(6)	1,05	0,755	1,60	0,536	2,15	0,250	2,70	— 0,040

Tafel über die Zylinderfunktion  $J_{\frac{1}{p}}(x)$ .Tabell över cylinderfunktioner  $J_{\frac{1}{p}}(x)$ .

Tab. 4.

 $\Pi\left(-\frac{1}{p}\right) = 1,3539 \dots$ 

$x$	$J_{-\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{-\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{-\frac{1}{p}}(x)$	$x$	$J_{-\frac{1}{p}}(x)$
0,00	+ $\infty$	0,60	+ 0,958	1,20	+ 0,452	1,80	+ 0,04
0,05	2,5236	0,65	0,909	1,25	0,414	1,85	+ 0,01
0,10	1,9974	0,70	0,862	1,30	0,376	1,90	— 0,02
0,15	1,7366	0,75	0,817	1,35	0,342	1,95	0,05
0,20	1,5674	0,80	0,773	1,40	0,305	2,00	0,08
0,25	1,440	0,85	0,732	1,45	0,269		
0,30	1,3435	0,90	0,690	1,50	0,234 (7)		
0,35	1,261	0,95	0,648	1,55	0,201		
0,40	1,188	1,00	0,607	1,60	0,167		
0,45	1,124	1,05	0,567 (5)	1,65	0,135		
0,50	1,065	1,10	0,528	1,70	0,102		
0,55	1,010	1,15	0,490	1,75	0,07		

Tafel über die Zylinderfunktion  $J_{-\frac{1}{p}}(x)$ .Tabell över cylinderfunktioner  $J_{-\frac{1}{p}}(x)$ .

Es ist klar, dass numerisches Rechnen mit (28) und (32) sich in hohem Grade zeitraubend gestaltet, und ich habe den Gewinn, den die Ausführung einer solchen Rechnung für jeden einzelnen Fall bringt, für nicht den Opfern an Zeit entsprechend erachtet. Da die Gleichungen aufgestellt wurden, um einen Überblick über die mechanischen Verhältnisse gewisser dichtgeschlossener Bestände zu ermöglichen, in welchen Beständen die Durchmesser der untersuchten Bäume ziemlich gleich gewesen sind, so habe ich dafür einen bestimmten Durchmesser gewählt und alle Berechnungen mit Bezug auf diesen ausgeführt. Es hat sich nachher erwiesen, dass nicht nur jüngere dichtgeschlossene Bestände gemäss diesen Gleichungen berechnet werden müssen, sondern auch ältere Bestände, die nicht besonders dicht scheinen. Daher könnte vielleicht der gewählte Durchmesser (3 cm) weniger praktisch erscheinen. Wie es sich später zeigen wird, bedeutet aber diese Wahl keinen wirklichen Übelstand, da jeder Durchmesser sehr einfach auf 3 cm reduziert werden kann.

Nach (28) und (32) wird also die Ableitung  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  der elastischen Linie berechnet, für eine gewisse Konstellation von  $A$  (Horizontaldruck) und  $P$  (Gipfelgewicht) sowie unter der Annahme, dass das spez. Gewicht des Holzes = 0,90 ist. Die elastische Linie selbst wird danach graphisch hergeleitet. Aus dieser erhält man leicht die Bieugungsmomente, die von  $P$  und  $E$  (dem Eigengewicht) herrühren. Zu ihrer Summe wird das Bieugungsmoment des  $A$  addiert. Gemäss (7) berechnet man ferner die Spannung  $\sigma$ .  $A$  und  $P$  sowie die Stablänge werden durch Versuche so gewählt, dass  $\sigma = 200 \text{ kg/cm}^2$  wird, was ja mit der vorher gemachten Annahme über die Druckfestigkeit übereinstimmt. In einem Koordinatensysteme, wo die  $y$ - und  $x$ -Achsen  $P$  und  $A$  darstellen, werden die so erhaltenen Punkte eingetragen. Durch Setzen von  $A$  bzw.  $P = 0$  erhält man Punkte der  $y$ - und  $x$ -Achse. Die Punkte, die zu derselben Stablänge gehören, werden durch eine Kurve verbunden, wodurch man ein Kurvensystem erhält, an welchem man, für eine bestimmte Länge des Paraboloids oder Zylinders und z. B. ein bestimmtes Gipfelgewicht ( $P$ ), diejenige Horizontalkraft ( $A$ ) ablesen kann, die eine Spannung von  $200 \text{ kg/cm}^2$  hervorruft.

Da es nie gelungen ist, die Konstellation  $A$ ,  $P$  und  $l$  so zu wählen, dass die Spannung exakt =  $200 \text{ kg/cm}^2$  wurde, so markieren die Kreise in Fig. 11, dass die Punkte mit einer gewissen Unsicherheit bestimmt worden sind. Da die Rechnungen umständlich sind und die Anzahl der Reihenglieder die geringste mögliche ist, und da ein graphisches Verfahren in die Berechnung eingeht, so darf man den Kurven in Fig. 11 keine grössere Präzision zuschreiben.

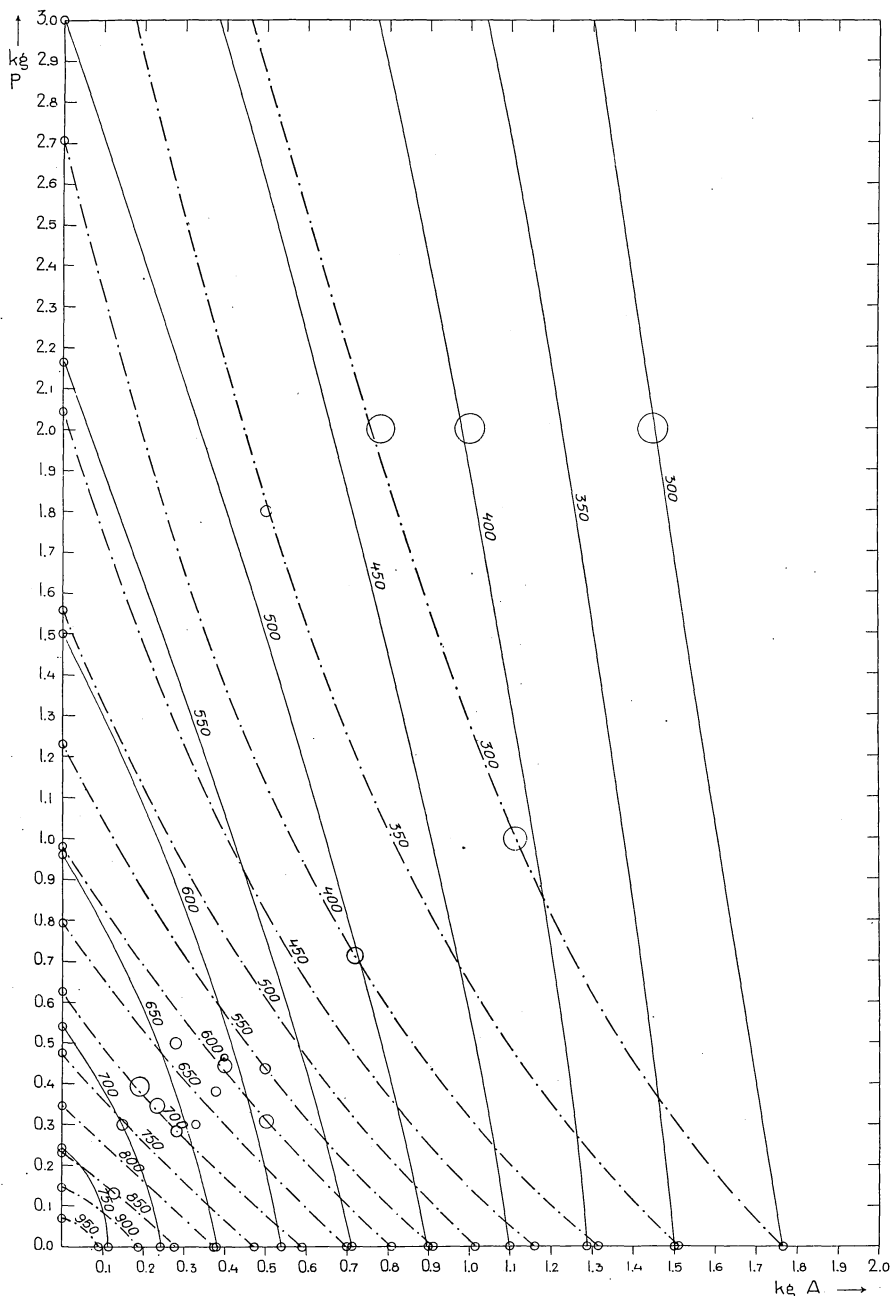


Fig. 11. Diagramm über das Zusammenwirken der Kraftfaktoren  $A$ ,  $P$  und  $E$ . Die Ziffern im Diagramme bedeuten Stablängen. Erklärung d. Buchst.  $A$ ,  $P$  u.  $E$  siehe S. 140.  
 — = Zylinder (Cylinder); - - - = kubisches Paraboloid (kubisk paraboloid).

Diagram över samspillet mellan kraftfaktorerna  $A$ ,  $P$  och  $E$ . Förklaring av bokst.  $A$ ,  $P$  och  $E$  se sid. 140.



In die genannte Figur sind die Kurven sowohl für Zylinder als für kubisches Paraboloid eingetragen. Hat man daher einen Stab von gewisser Länge, dessen Form zwischen dem Zylinder und dem Paraboloid liegt, so kann man in der Figur zwischen den derselben Länge entsprechenden Kurven für Zylinder und Paraboloid interpolieren. Eine recht beträchtliche Anzahl von Proberechnungen haben gezeigt, dass man auf diese Weise ziemlich gute Resultate erhält.

Der jetzt auszuführende Beweis ist mir freundlichst von Herrn Dozenten HILDING FAXÉN mitgeteilt worden. Wir betrachten den 3 cm starken Baum als einen Stab  $S^0$ , der im Punkte  $x^0$  den Radius  $r_{x^0}$  hat. Er wird durch den Vertikaldruck  $P^0$  und die Horizontalkraft  $A^0$  belastet. Es gilt dann gemäss (23):

$$E \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d \left( r_{x^0}^4 \frac{dp^0}{dx^0} \right)}{dx^0} = -p^0 W_{x^0} - P^0 p^0 + A^0 \dots \dots (33)$$

Der beliebig gewählte Baum ist mit einem Stab  $S$  zu vergleichen, der im Punkte  $x$  den Radius  $r_x$  hat, wo aber:

$$r_{x^0} = a r_x; \quad x^0 = \beta x; \quad a \text{ und } \beta = \text{Konst.} \dots \dots (34)$$

Es soll gezeigt werden, dass der Stab  $S$ ,  $P$  und  $A$  (womit derselbe zu belasten ist) so gewählt werden können, dass die elastischen Linien analog geformt sind.

Es ist:  $W_x = \int_0^x \pi w r_x^2 dx$  und  $W_{x^0} = \int_0^{x^0} \pi w r_{x^0}^2 dx^0$  oder nach (34):

$$W_{x^0} = \int_0^x \pi w a^2 r_x^2 \beta dx = a^2 \beta W_x.$$

Der letzte Ausdruck, sowie (34), werden in (33) eingesetzt, der dann liefert:

$$\frac{a^4}{\beta^2} E \frac{\pi}{4} \frac{d \left( r_x^4 \frac{dp^0}{dx} \right)}{dx} = -p^0 a^2 \beta W_x - P^0 p^0 + A^0 \dots \dots (35)$$

Die Gleichung (35) wird identisch mit (23), wenn  $p^0 = \gamma p$ , wo  $\gamma = \text{Konst.}$ , wenn ferner  $\frac{a^4}{\beta^2} = a^2 \beta$ ,  $P^0 = \frac{a^4}{\beta^2} P$ , und  $A^0 = \frac{a^4}{\beta^2} \gamma A$ , denn dann verschwinden  $a$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  aus der Gleichung (35).

Nach Obenstehendem erhält man:

$$\beta = a^{\frac{2}{3}}; \quad P^0 = a^{\frac{8}{3}} P; \quad A^0 = a^{\frac{8}{3}} \gamma A; \quad x_0 = a^{\frac{2}{3}} x \dots \dots (36)$$

Ferner gilt nach (21 c):

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1}{r_x} \quad \text{und} \quad \frac{dp^0}{dx^0} = \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1}{r_{x^0}} \dots \dots (37)$$

Sollen die Stäbe bis zum Bruch angestrengt sein, gilt:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{s}{E} \frac{1}{r_x} \text{ und } \frac{dp^0}{dx^0} = \frac{s}{E} \frac{1}{r_{x^0}} \dots \dots \dots (38)$$

Da aber die Spannungen in gleich liegenden Punkten der beiden Stäbe proportional sind, so wird in dem am meisten angestrengten Punkt  $r^0 = a r$ .

Nun ist jedoch nach Vorstehendem:

$$\frac{dp^0}{dx^0} = \frac{\gamma}{a^{\frac{2}{3}}} \frac{dp}{dx}, \quad \frac{1}{r^0} = \frac{1}{ar} \text{ und also nach (38): } \frac{s}{E} \cdot \frac{1}{ar} = \frac{\gamma}{a^{\frac{2}{3}}} \frac{dp}{dx} = \frac{\gamma}{a^{\frac{2}{3}}} \frac{s}{E} \frac{1}{r},$$

woraus schliesslich folgt:  $\gamma = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$ . Dieser Wert wird in (36) eingesetzt,

und so ergibt sich:

$$x^0 = a^{\frac{2}{3}} x; \quad P^0 = a^{\frac{8}{3}} P; \quad A^0 = a^{\frac{7}{3}} A \dots \dots \dots (39)$$

Damit ist also die Möglichkeit gegeben, die Berechnungen für den Standardstab auf jeden anderen Stab zu übertragen.

## KAP. VI. Über die Berechnung einiger Probestämme.

### Relative Dimensionen.

Die Vorarbeit, deren Hauptzüge ich in den vorstehenden Kapiteln dargelegt habe, ist noch nicht in grösserem Umfange für Kalküle über den Gleichgewichtszustand lebender Stämme verwertet worden. Um solche mit wirklicher Sicherheit ausführen zu können, dürfte übrigens noch viel Arbeit erforderlich sein. Besonders betreffs des Verhältnisses zwischen der Windgeschwindigkeit und dem von der Krone empfangenen Winddruck ist unsere Kenntnis äusserst mangelhaft und unvollständig. Wie ich früher bemerkt habe, ist es keineswegs sicher, dass die Angaben, welche aus solchen artifiziellen Versuchen wie den in Kap. II erwähnten erhalten werden, wirklich richtig und zuverlässig sind. Das Verhältnis zwischen Windgeschwindigkeit und Winddruck für eine ganze Krone kann jedoch auf eine andere Weise untersucht werden, obwohl diese sehr umständlich und zeitraubend ist, nämlich durch Messung der Faserverkürzung in einem bestimmten Punkte des Stammes und gleichzeitige Windgeschwindigkeitsbestimmung.

Die Berechnungen einiger Fichtenprobestämme, worüber ich jetzt in grösster Kürze berichten will, sind nur als sehr approximativ zu betrachten, dies teils aus Gründen, die vorher erwähnt sind, und teils auch wegen einer ziemlich groben Bestimmung der Kronenfläche. Die schöne Übereinstimmung mit der mechanischen Theorie, welche die Berechnungen aufweisen, dürfte daher bis auf weiteres mit einer gewissen Skepsis zu betrachten sein.

Durch Zufall fand ich zwei Fichten nebeneinander in einem sehr lichten Bestande, die eine mit einer beinahe zylindrischen (*C*), die andre mit einer kegelförmigen (*K*) Krone. Die Kronen beider Bäume reichten nahezu bis zum Boden. Die Kronenmasse jedes Zehntels des Stammes wurde gewogen, und nach gewissen vorher berechneten Werten der

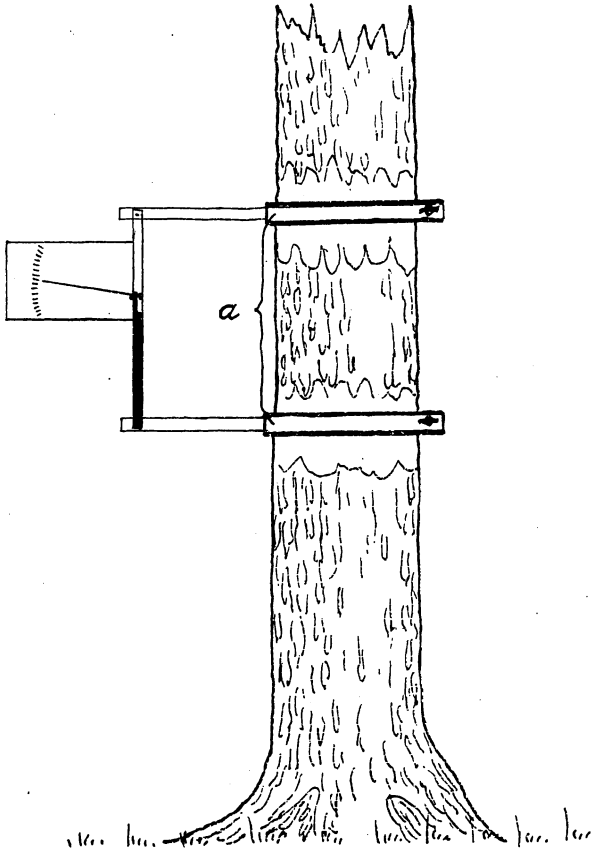


Fig. 12. Instrument zur Messung der Faserverkürzung bei Biegung (schematisch).

Instrument för mätning av fiberförkortningen vid böjning (schematiskt).

Kronenfläche pro kg Kronengewicht wurde die entsprechende Kronenfläche ermittelt. Im starken Sturme wurde die Windgeschwindigkeit vor den betr. Bäumen so gemessen, dass man eine Windkurve, ähnlich denen in Fig. 1, aufzeichnen konnte. Das Gewicht der Krone und des Schaftes brauchte bei der Berechnung der Form dieser Bäume nicht berücksichtigt zu werden. Aus Gründen, über die ich hier nicht im einzelnen berichten kann, stellte es sich als wahrscheinlich heraus, dass für die Fichte

(C) die Kurve I in Fig. 5 für die Abhängigkeit zwischen Windgeschwindigkeit und Winddruck und für die Fichte (K) die Kurve II zu gelten hatte. Dies ist in hohem Grade eine subjektive Wahl, wenn es auch durch verschiedene Details im Aussehen und Bau der Krone motiviert werden kann. Eben in diesem Punkte liegt augenscheinlich die wesentliche Schwierigkeit. Wir können aber nichts an der Sache tun und müssen uns mit der Gewissheit begnügen, dass die fraglichen Druckkurven jedenfalls möglich und sogar wahrscheinlich sind.

Auf Grund der Angaben, die so vorliegen, kann man nun  $M_x$  für die beiden Fichten berechnen. Zuzufolge (7) finden wir dann:

$$\sigma \frac{\mathcal{F}_x}{r_x} = \sigma \frac{\pi}{4} r_x^3 = M_x,$$

oder, da  $\sigma = s = \text{Konst.}$ :

$$r_x = \left( \frac{4 \cdot M_x}{s \pi} \right)^{\frac{1}{3}} \dots \dots \dots (40)$$

In Tab. 5 finden wir einen Vergleich zwischen den so berechneten Dimensionen und den wirklichen, nachdem beide in relative Masse überführt worden sind (Basalradius = 1,000).

Tab. 5. Vergleich zwischen wirklichen und aus dem Biegemomente berechneten Schaftdimensionen.

Jämförelse mellan verkliga och ur böjningsmomentet beräknade stamdimensioner.

Baum	Abstand vom Gipfel %	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
C	Winkl. Dim.	0,000	0,212	0,337	0,444	0,554	0,639	0,722	0,805	0,875	0,945	1,000
C	Berechn. »	0,000	0,207	0,337	0,446	0,552	0,644	0,735	0,809	0,882	0,943	1,000
K	Winkl. »	0,000	0,135	0,231	0,328	0,422	0,523	0,637	0,738	0,842	0,923	1,000
K	Berechn. »	0,000	0,120	0,216	0,324	0,422	0,520	0,633	0,738	0,838	0,927	1,000

Die Tab. 5 zeigt, dass die berechneten Dimensionen sich erstaunlich gut an die wirklichen anschliessen. Damit ist auch bewiesen, dass  $\sigma$  beinahe konstant ist, unter den Voraussetzungen, die betreffs der Windgeschwindigkeit und des Winddruckes gemacht sind. Ich habe aber versucht, die Konstanz der Spannung auch auf eine andere Weise darzutun.

Die beiden Fichten wurden während eines heftigen Sturmes senkrecht zur Windrichtung photographiert. An den Photographien erhielt ich durch genaue Messungen die elastische Linie. Nach (10) finden wir

$y = \int dx \int \frac{M_x}{E \mathcal{J}_x} dx$ , und man erhält demnach, durch doppelte graphische Differentiation der experimentell gefundenen elastischen Linie, eine Kurve, die  $\frac{M_x}{E \mathcal{J}_x}$  wiedergibt. Da nun nach (7)  $\sigma = \frac{M_x}{\frac{\pi}{4} r_x^3}$ , so kann augenschein-

lich  $\sigma$  berechnet werden durch Multiplikation von  $\frac{M_x}{E \mathcal{J}_x}$  mit  $r_x$ . Auf diese Weise, die unabhängig von jeder Annahme über Windgeschwindigkeit, Winddruck und Kronenfläche ist, ergibt sich die folgende Serie relativer  $\sigma$ -Werte.

Tab. 6. Das Bruchrisiko in relativen Massen, aus der elastischen Linie berechnet. Relativa brottriskén, beräknad ur elastiska linjen.

Abstand vom Gipfel	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Baum										
C	1,03	1,01	1,01	1,02	1,02	1,01	1,00	1,00	0,98	1,00
K	0,76	0,93	0,94	0,99	1,01	1,01	0,99	0,99	0,99	1,00

Die Spannung  $\sigma$  oder mit anderen Worten das Bruchrisiko ist offenbar sehr konstant, auch wenn sie auf diese Weise berechnet wird. In den Gipfelsektionen der Fichte *K* sinkt sie allerdings recht beträchtlich, was aber daraus erklärt werden kann, dass beim Photographieren der Wipfel dieses Baumes durch einen lokalen Windstoss ein wenig unregelmässig gebogen wurde. Die aus Tab. 6 berechneten Dimensionen stimmen noch besser mit den wirklichen überein, als die in Tab. 5 angegebenen.

Ausser diesen beiden Fichten wurden auch vier andere untersucht. Drei von ihnen wuchsen in einem mässig geschlossenen, reinen Fichtenbestand, und die vierte stand in einem sehr lichten. Die Form dieser Bäume wurde auch sehr genau bestimmt, mit Hilfe von Angaben über die Kronenfläche, die Windgeschwindigkeit und den Winddruck. Diese Angaben erhielt ich aus der dem Bestandesschluss entsprechenden Windkurve (vgl. Kap. I) und der Druckkurve V (siehe Fig. 5). Die Kronenfläche wurde durch direkte Messungen ermittelt.

Es scheint also, als könnten die mechanischen Prinzipien die Form dieser Bäume ausserordentlich wohl erklären. Ganz gewiss wäre es jedoch übereilt, hieraus den Schluss zu ziehen, dass die Fichte oder gar die Bäume insgesamt ihre Form gemäss den Forderungen der mechanischen Theorie ausbilden.

Es ist nämlich gar nicht ausgeschlossen, dass die Form der Fichte durch ganz andere Umstände bestimmt wird, obwohl diese, durch ein Spiel des Zufalls oder etwa auf Grund eines Zusammenhangs, den wir nicht kennen, zum Teil vielleicht wegen der oft sehr regelmässigen Entwicklung der Fichtenkrone, zufälligerweise ebenso wie die mechanischen Kräfte wirken. Es gibt in der Tat manches, was dafür spricht, dass die mechanischen Prinzipien, wenn sie auch nicht bedeutungslos sind, doch nicht immer in der Schaftform der Bäume zu klarem Ausdruck kommen. Ich komme hierauf in einem anderen Zusammenhange zurück.

#### Absolute Dimensionen.

Wenn wir der mechanischen Theorie gemäss gelten lassen, dass die im Schafte entstehenden Spannungen den Zuwachs so dirigieren, dass sie überall gleich gross werden, so liegt die Vermutung nahe, dass auch die absolute Menge des Schaftzuwachses durch die Spannungen bestimmt werden wird. Man könnte sich dabei denken, dass der Zuwachs des Schaftes so lange fort dauert als nötig ist, um die grösste zulässige Spannung auf demjenigen Grenzbetrage zu halten, der durch die Festigkeitseigenschaften des Holzes gegeben wird. Der Schaftzuwachs sollte also nur in dem Masse stattfinden, wie die am Schafte wirkenden Kräfte dies notwendig machen. Wenn diese also konstant bleiben oder wenn sie sich etwa vermindern, sollte folglich der Schaftzuwachs aufhören. Dies trifft vielleicht nie ein, weil der Schaftzuwachs auch aus anderen Gesichtspunkten als denen der mechanischen Festigkeit erforderlich ist, aber andererseits ist diese Konsequenz der Theorie bei weitem nicht so absurd, wie man im ersten Augenblicke zu glauben geneigt ist. Man könnte nun zwar auf die Bäume in Gewächshäusern hinweisen. Es sind ja doch Bäume, mit ausgebildeten Stämmen, aber dabei muss man auch zugeben, dass ihre Stämme vielleicht derjenigen Aufgabe entsprechen, die sie im Gewächshause zu erfüllen haben, aber vielleicht durchaus nicht die mechanische Beanspruchung aushalten würden, die sie in ihrem natürlichen Milieu hätte treffen müssen. Es ist noch unbekannt, inwiefern die mechanische Funktion des Schaftes grössere Dimensionen fordert als seine übrigen Funktionen. Gewiss ist aber, dass Fälle beobachtet sind, wo es scheint, als hätte eine Abkoppelung der mechanischen Beanspruchung in einer fast vollkommenen Einstellung des Schaftzuwachses resultiert (vgl. S. 139)

Die Frage der absoluten Dimensionen und ihres Verhältnisses zu der mechanischen Beanspruchung ist bei weitem noch nicht für eine ziffermässige Behandlung reif. Es ist leicht einzusehen, dass, in weit höherem Masse als betreffs der Form, es betreffs der absoluten Dimensionen eine

notwendige Forderung ist, dass sich die Krone und der Schaft des Baumes in einer natürlichen, von jedem Eingriff in die Bestandesverhältnisse ungestört bleibenden Gleichgewichtslage befinden, weil sonst jede Berechnung irreführend wird. Selbstverständlich bedeutet dies nicht, dass der untersuchte Bestand etwa undurchforstet sein muss, nur dass eine Durchforstung nicht eben vor der Untersuchung vorgenommen worden ist. Aus diesem Grunde dürften die oben erwähnten Fichtenprobestämme für eine ziffermässige Berechnung weniger geeignet sein.

Wenn dem aber so ist, dass jeder Stamm aufgebaut wird, um dem Winddruck zu entsprechen, so muss jedenfalls der Druck  $A$ , der nach (7) oder (28) berechnet werden kann, auf eine und dieselbe Windgeschwindigkeit im Raume oberhalb des Bestandes zurückgeführt werden können. Wenn in den Gleichungen  $\sigma =$  der Bruchfestigkeit ( $s$ ) gesetzt wird, so erhält man die Windgeschwindigkeit, welche die Bäume zu brechen vermag; setzt man aber  $\sigma =$  der Spannung an der Elastizitätsgrenze des Holzes, so erhält man eine andere, niedrigere Windgeschwindigkeit, welche den Schaft bis zur Elastizitätsgrenze biegt. Welches von beiden man eigentlich tun soll, lässt sich, wie vorher angedeutet wurde, unmöglich sicher entscheiden. Handelt es sich aber um die Bruchfestigkeit (was aus physiologischem Gesichtspunkte kaum als wahrscheinlich anzusehen ist), so sollte man erwarten, dass die gemäss den Berechnungen erhaltene konstante Windgeschwindigkeit die grösste in der Gegend vorkommende wäre.

Betreffs eines Teiles der Probestämme, u. a. der vorher erwähnten Fichten, die in diesen Hinsichten untersucht worden sind, ist diese etwa 28 m/sec. Die Berechnung ergab, dass der Druck, den ein Wind von 28 m Geschwindigkeit ausübt, in der Tat nicht allzu viel von dem Drucke abweicht, den die Schäfte bei Voraussetzung von 200 kg Bruchfestigkeit ertragen können. In der Regel scheint es jedoch, als wäre der Winddruck ein wenig niedriger. Dies kann sowohl als ein Zeichen davon gedeutet werden, dass die Druckkurven in Fig. 5 zu tief liegen, als auch davon, dass die Elastizitäts- oder Fliessgrenze besser als die Bruchgrenze die Norm angibt, an die der Zuwachs sich möglicherweise anpasst.

Ein recht interessanter Versuch, um zu entscheiden, ob das erstere der Fall war, ist in der Weise ausgeführt worden, dass die Faserverkürzung an einem bestimmten Punkte des Stammes gemessen wurde, wenn dieser von einem Winde gebogen wurde, dessen Geschwindigkeit man registrieren konnte. Mit Hilfe des in Fig. 12 schematisch abgebildeten Instrumentes konnte eine derartige Untersuchung ausgeführt werden. Das Ergebnis war aber, dass die Baumkrone weniger Druck zu empfangen scheint als die einzelnen Äste. Die Experimente waren

jedoch wenig zahlreich und das Instrument recht unvollkommen, weshalb das Resultat als sehr unzuverlässig anzusehen ist. Ich erwähne das Experiment nur wegen der Methode, die brauchbar und entwicklungsfähig zu sein scheint.

## KAP. VII. Eine Studie über die Schaftform dichtgeschlossener Bestände.

Die in dem vorigen Kapitel gewonnenen Resultate veranlassten mich, solche Stämme näher zu studieren, die mehr eigenartigen Belastungsverhältnissen ausgesetzt gewesen waren. Dadurch hoffte ich eine Bestätigung oder wenigstens eine neue Beleuchtung der mechanischen Theorie zu gewinnen.

Die Absicht war von Anfang an, festzustellen, ob verschiedene ziemlich gewöhnliche Abweichungen von der normalen Schaftform durch die mechanische Schaftformtheorie erklärt werden konnten. Allmählich fand ich es aber notwendig, mich auf diejenige Art von Abweichungen zu beschränken, die in speziell dichtgeschlossenen Beständen angetroffen werden. Die Ursache hiervon ist, dass die wichtigste der jetzt weggelassenen Schaftformabweichungen für ihre Behandlung eine Anwendung der mechanischen Torsionstheorie verlangt. Dazu ist aber die Kenntnis einer bestimmten Elastizitätskonstante für frisches Holz notwendig. Diese konnte aber nicht bestimmt werden. Nach Versuchen, die an der Staatlichen Materialprüfungsanstalt gemacht worden sind, erhielt man, wie vorher erwähnt wurde, vollkommen absurde Werte der fraglichen Konstante (POISSON's Zahl). Dies hängt mit der inhomogenen Struktur des Holzes zusammen, die bei Torsion sich stark geltend macht. Wahrscheinlich ist, dass man auf Umwegen auch diesen Fall wenigstens in seinen wichtigsten Hauptzügen klarlegen könnte, aber da es sich deutlich gezeigt hat, besonders aus dieser Untersuchung, dass eine grosse Genauigkeit der Berechnungen eine notwendige Voraussetzung für sichere Resultate ist, habe ich es vorgezogen, bis auf weiteres ganz auf eine eingehende Behandlung dieses Falles zu verzichten (vgl. die Abteilung Torsion, Kap. V).

Da dieses Kapitel in gewissem Sinne als den übrigen gegenüber freistehend betrachtet werden kann, habe ich es für notwendig gehalten, ihm ein wenig grössere Breite als jenen zu geben.

### Die Beschaffenheit des Bestandes und der Probebäume.

In dichten Naturverjüngungen von Kiefer trifft man zuweilen Stämme an, die ungeheuer lang im Verhältnis zum Durchmesser sind. Ein Stamm,



der 1 m vom Boden einen Durchmesser von 3 cm hat, kann z. B. mehr als 7 m lang sein. Das Formverhältnis  $\left(\frac{h}{d_{1,3}}\right)$ , das sich gewöhnlich

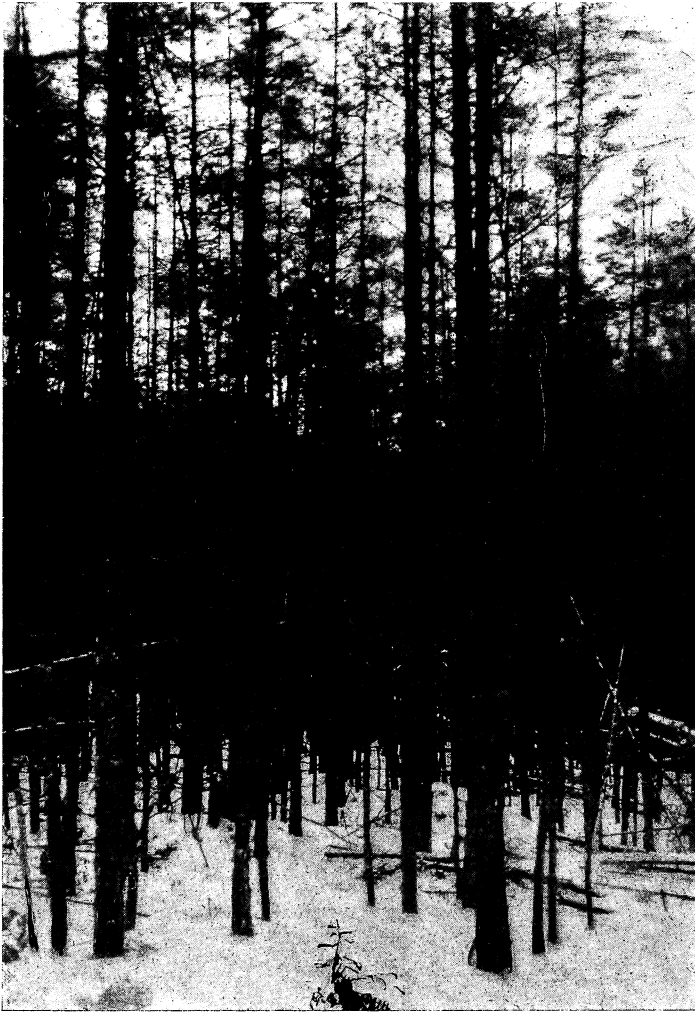


Fig. 13. 50-jährige dichte Kiefernverjüngung.  
50-årig tät tallsjälvsådd.

unter 100 zu halten pflegt, ist hier weit über 200. Derartige schlanke Bäume gehören immer zu den mitherrschenden, beherrschten oder unterdrückten Stammklassen. Die weitestgehenden Extreme sind meistens stark unterdrückte, absterbende Bäume oder auch solche, die in ausserordentlich enger und eingeklemmter Stellung aufgewachsen sind.

Diese Grenztypen können spontan nur dank dem geringen Schichtvermögen im Verein mit dem grossen Lichtbedarf der Kiefer entstehen, welche beiden Umstände eine sehr geringe und langsam fortgehende natürliche Ausscheidung und einen so lange wie möglich erhaltenen Höhenzuwachs bedingen.

Als Beispiel für die Beschaffenheit derjenigen Bestände, in denen derartige extrem schlanke Schäfte zu finden sind, teile ich hier einen Auszug aus einer Abschätzung einer Probestfläche im Gemeinwald des Kreises Göstring mit, aus der die späterhin erwähnten Probestbäume entnommen sind.

Tab. 7. Probestfläche in einer dichten Selbstsaat von Kiefer. Alter 50 Jahre. Die Ziffern gelten pro 1 Hektar. Das Areal der Fläche  $20 \times 30 \text{ m} = 0,06 \text{ Hektar}$ .  
Provyta i en tät självsådd av tall. Siffrorna gälla per hektar.

Holzart	Kbm	Stammzahl	Grundfläche m <sup>2</sup>	Mittel-	
				höhe m	durchm. cm
Kiefer .....	160	4,980	28,0	11,2	8,5
Birke .....	2	115	0,5	9,9	7,5
Summe u. Mittel:	162	5,095	28,5	11,1	8,5

Nach der Tabelle JONSON's für Okularabschätzung von Kiefernbeständen nach Mittelhöhe und Schlussgrad ist der Kubikmassenschluss der Fläche rund 1,1. Nun ist jedoch zu beachten, dass die Probestfläche in der Absicht gewählt wurde, ein repräsentatives Bild eines grösseren Bestandteiles zu geben, während dagegen die schlanksten Bäume nur in besonders dichten Teilen auftreten. Folglich kommt in der Tabelle der Bestandstypus dieser kleinen Gebiete nicht zu ganz richtigem Ausdruck. Der Bestand ist hier niedriger, stammreicher und schlanker, als die durchschnittlichen Ziffern angeben. Der Zuwachs ist im 50-jährigen Bestande relativ gross — 4,1 % — bedingt u. a. durch die stellenweise recht zahlreichen, freien, vorherrschenden Stämme. Die Fläche wurde durchforstet, und die Ausbeute war 36 % der Kubikmasse und 55 % der Stammanzahl, welche beiden letzteren Ziffern, mit einander verglichen, das reichliche Vorkommen unterdrückter Stämmchen andeuten. Diese waren in der Tat noch zahlreicher, als aus den Hiebsprozenten geschlossen werden kann, denn bei der Bestandestaxierung wurden Stämme unter 4 cm mit Rinde ausser Acht gelassen.

Wenn man die Form der schlanksten Bäume untersucht, wird man anfangs von ihrer unerwarteten Formvariation überrascht. Es ist un-

möglich, eine konsequent durchgehende charakteristische Eigenschaft der Form zu finden. Man bemerkt aber sofort, dass das kubische Paraboloid, das sonst die typische und leicht erkennbare Grundform für die normalen, nicht allzu reich bekronten Stämme abgibt, nicht

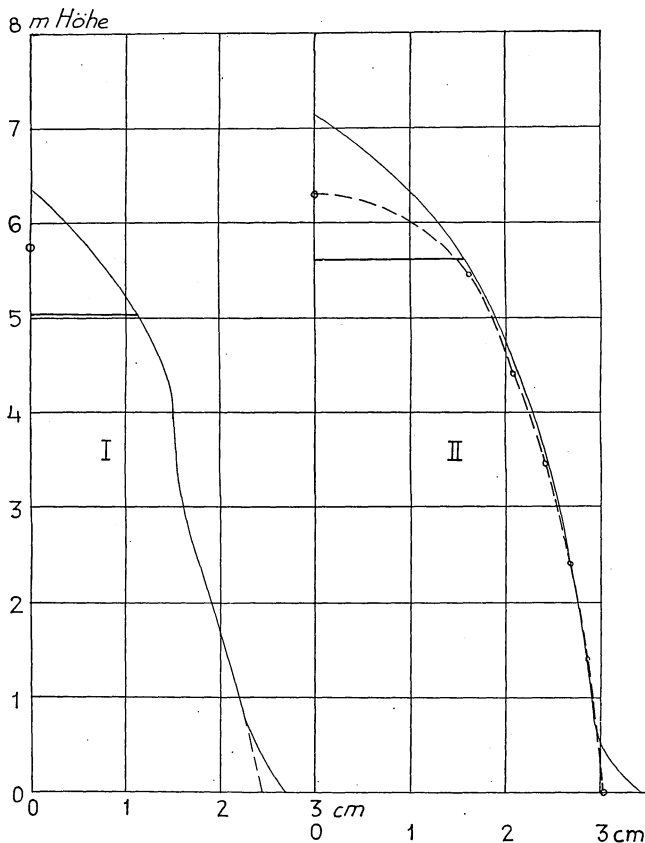


Fig. 14. Stammkurven der Kiefernprobabäume. Der horizontale Strich bedeutet untere Kronengrenze. Der kleine kreis Markiert das Druckcentrum.

Tallprovträdens Stammkurvor. Det horisontala strecket betyder den nedre krongränsen. Den lilla cirkeln markerar tryckcentrum.

- = wirkliche Stammkurve.
- - - = berechnete Stammkurve.
- = verklig stamkurva.
- = beräknad stamkurva.

mehr wiederzufinden ist. Erst wenn der Stamm nicht zu den schlappsten gerechnet werden kann, kehrt allmählich die »normale« Form wieder. Ich verweise hier auf die Figg. 14—19, welche die Schaftform von 21 Probabäumen aus dem obengenannten Bestande illustrieren. Um für die eben gemachte Bemerkung sogleich ein Beispiel anzuführen, will ich

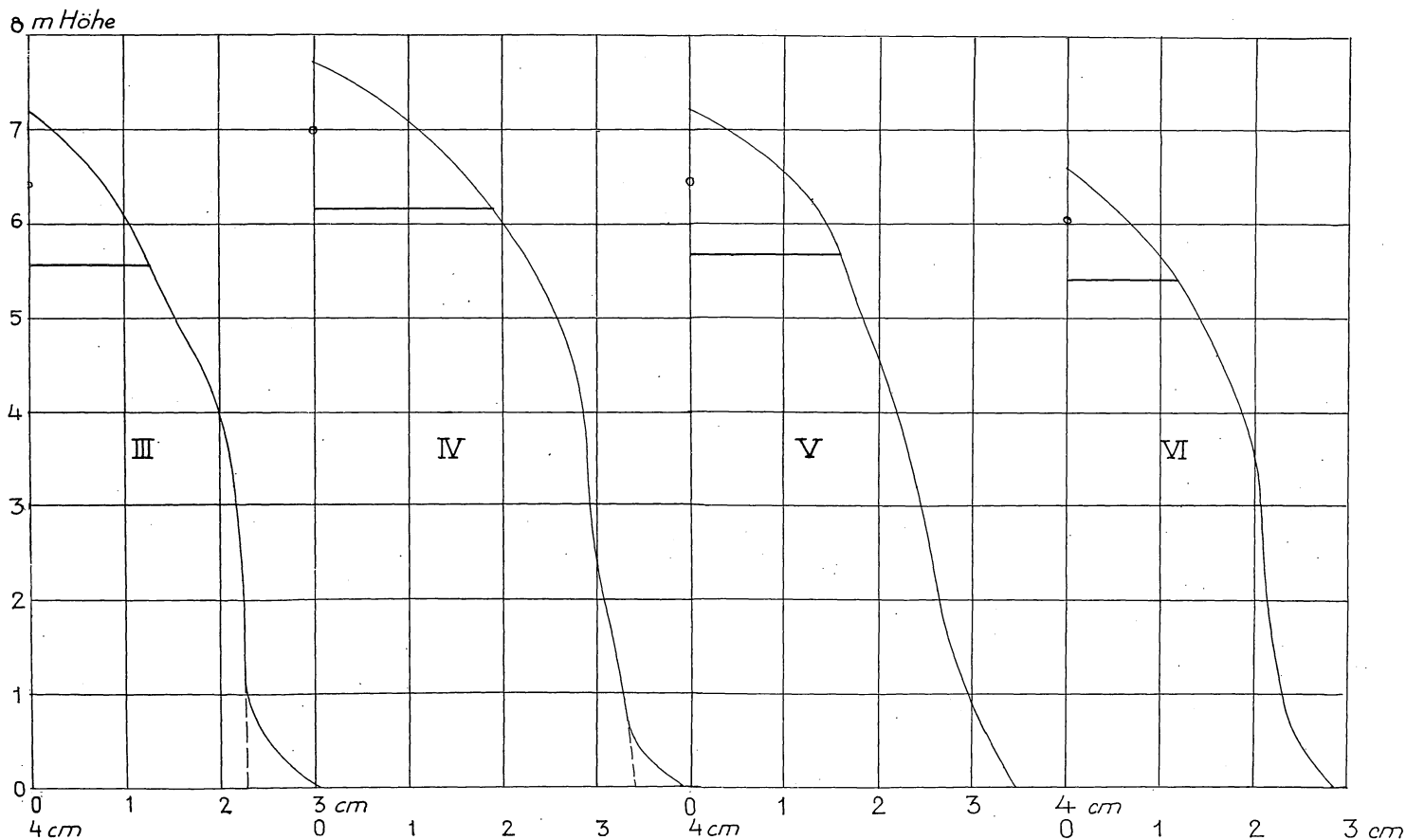


Fig. 15. Text siehe Fig. 14.  
Text se Fig. 14.

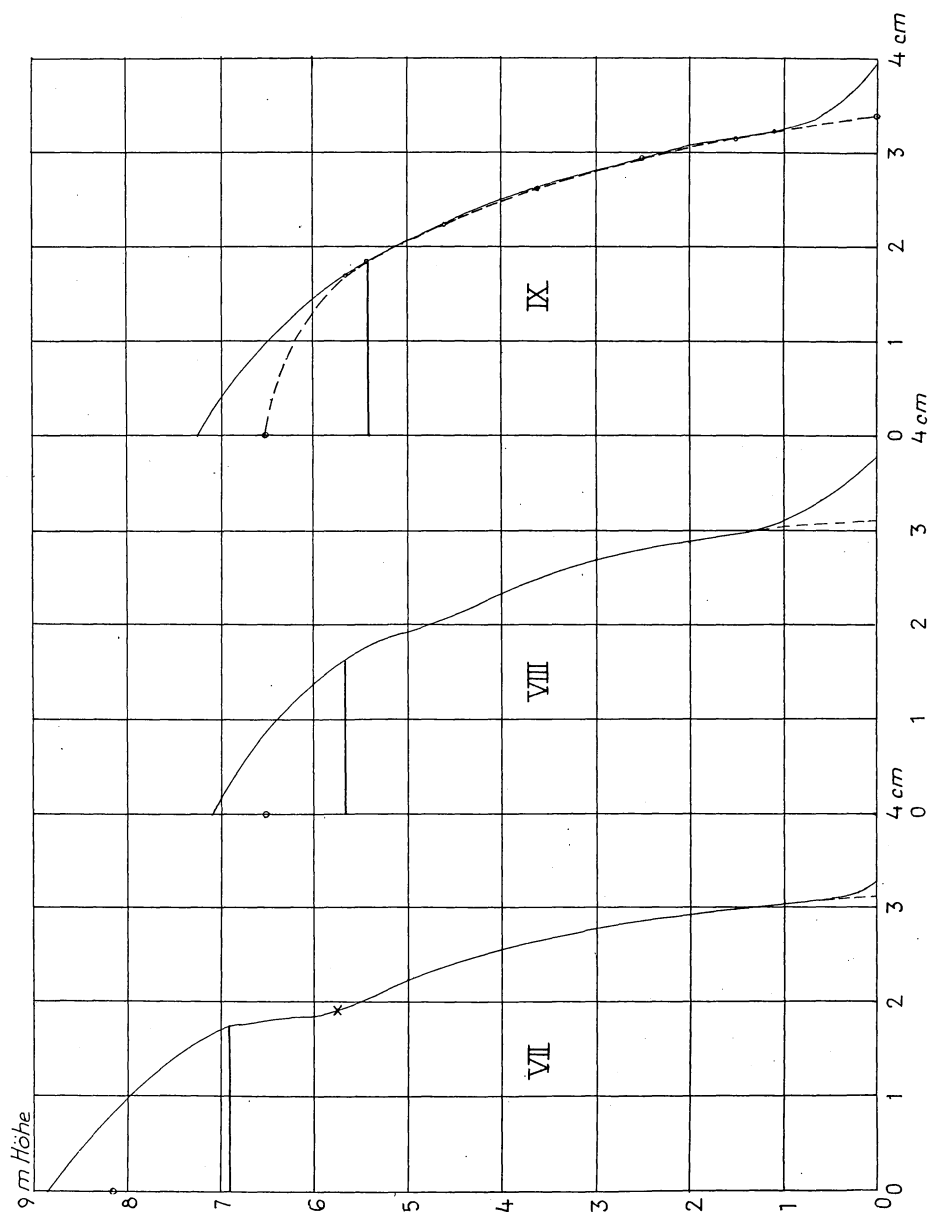


Fig. 16. Text siehe Fig. 14.  
Text se Fig. 14.

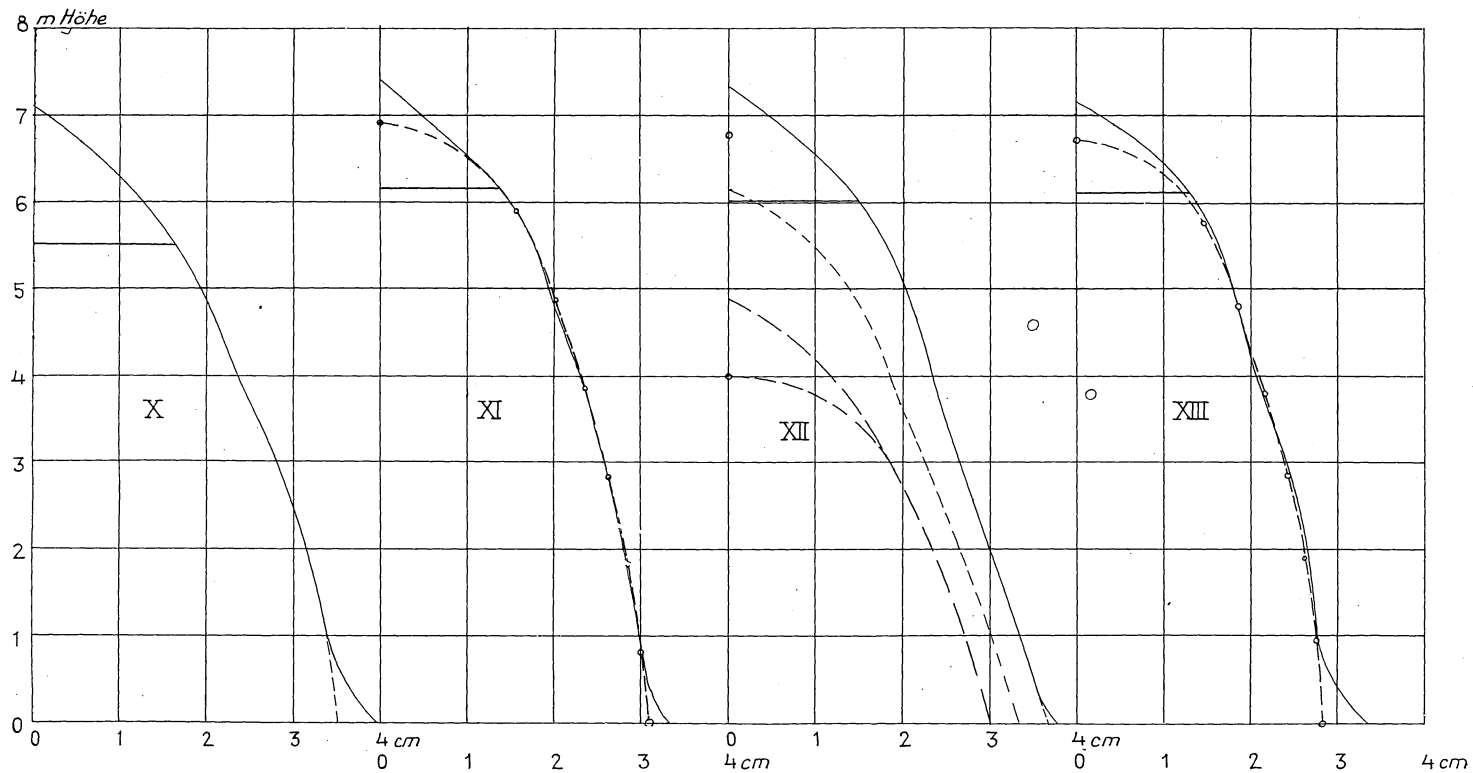


Fig. 17. Text siehe Fig. 14.  
Text se Fig. 14.

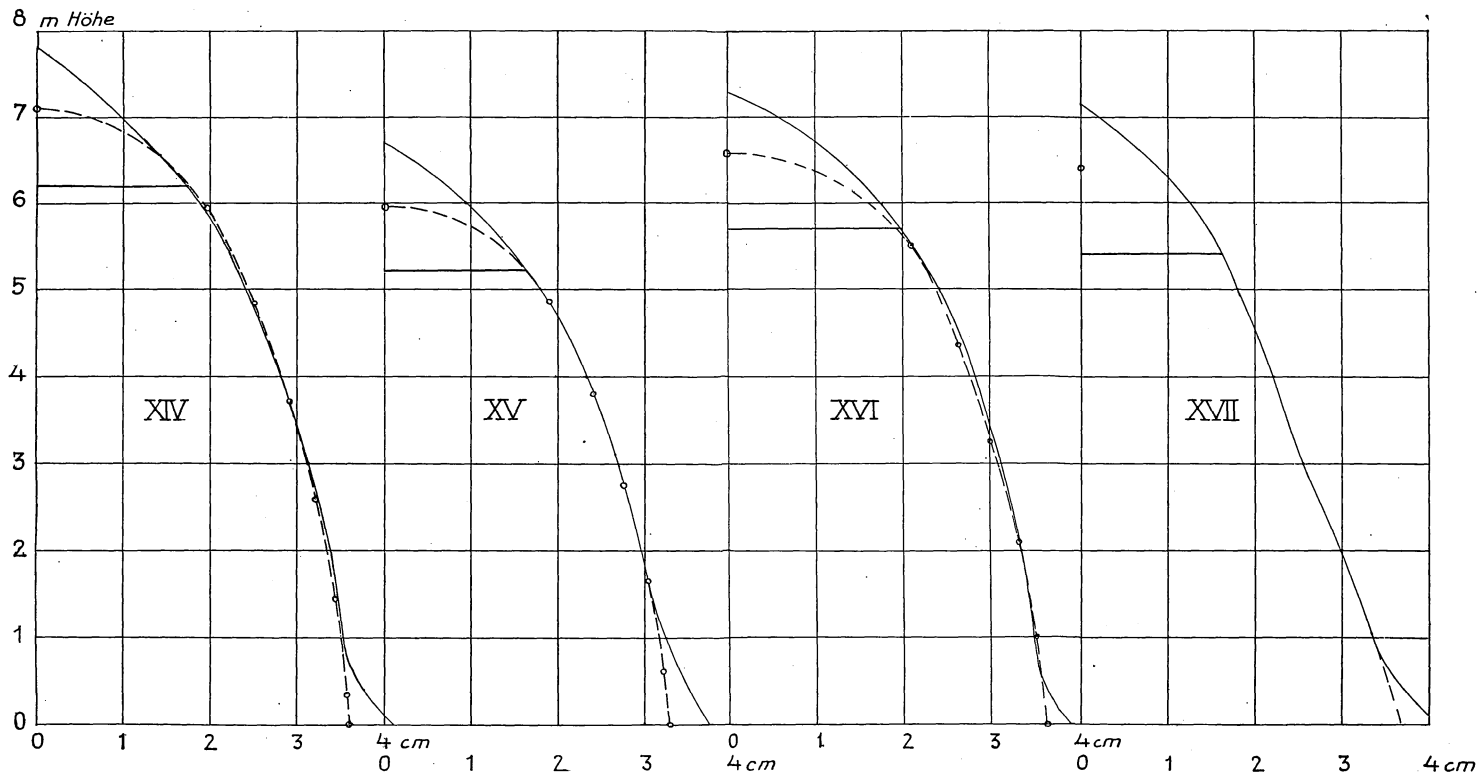


Fig. 18. Text siehe Fig. 14.

Text se Fig. 14.

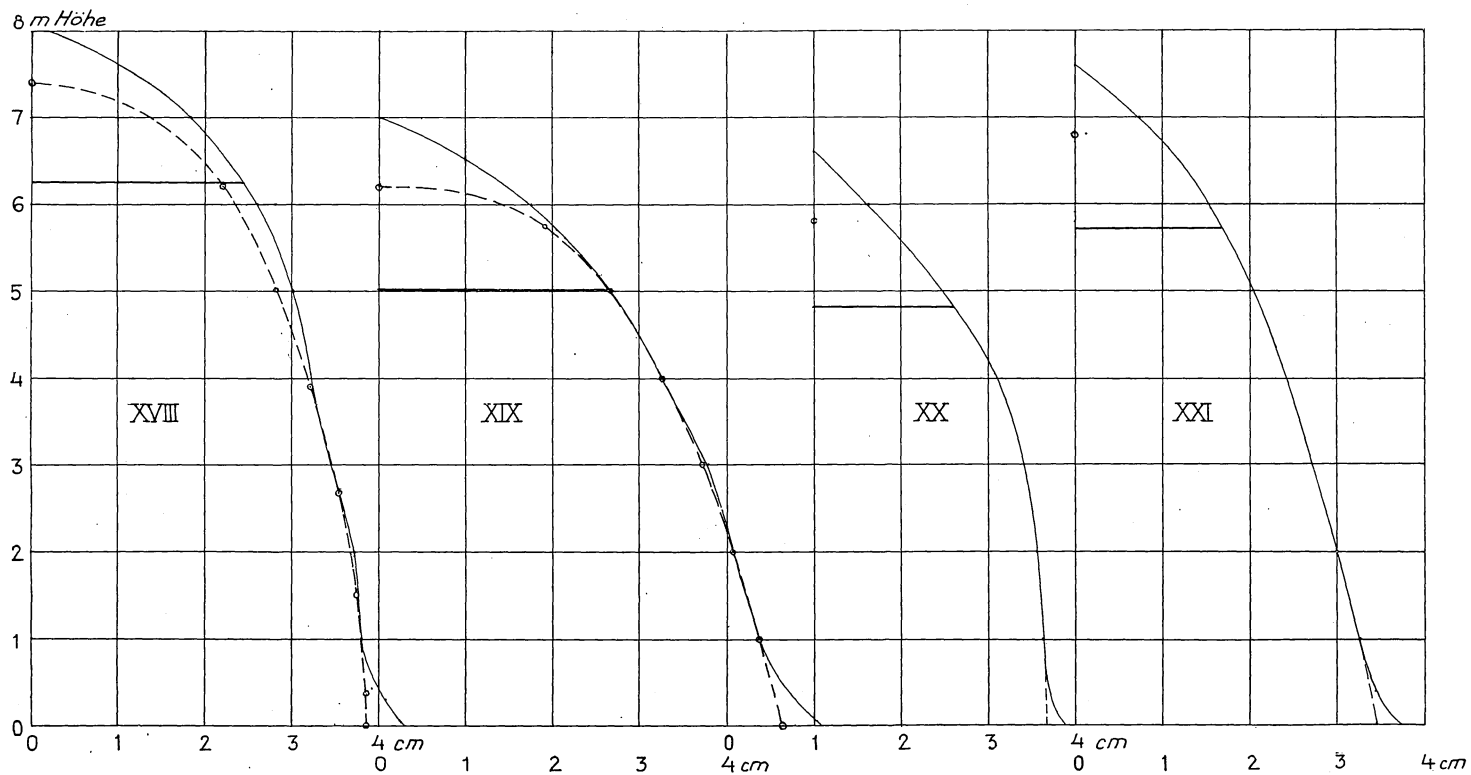


Fig. 19. Text siehe Fig. 14.  
Text se Fig. 14.



die Aufmerksamkeit auf den Probebaum Nr. XIX lenken, der ein ganz gewöhnlicher, vollkommen frei stehender, nicht besonders schlanker Baum war. Seine Schaftform wird durch die kubische Parabel gut wiedergegeben. Manche andere Bäume, die schwächtiger waren, werden gut wiedergegeben durch Kurven, die ihrem Äusseren nach der kubischen Parabel nahe stehen (z. B. Nr. II, IX, XV u. a. m.), und die bei abnehmendem Einfluss gewisser vom Schlankheitsgrade abhängenden Konstanten allmählich in die exakte Parabel übergehen.

Die Schäfte sind bald ungewöhnlich vollwüchsig, bald unerwartet abförmig (Nr. X, XII, XVII, XXI). Eben unter der Kronengrenze tritt oft eine bemerkenswerte, schwache Einbiegung der Stammkurve auf. Ich komme auf diese und andere Eigentümlichkeiten weiter unten näher zurück.

Angaben der Längen und Durchmesser ohne Rinde können aus den Figg. 14—19 erhalten werden.

#### Gewicht und Fläche der Krone.

Die Kronen der schlanken, unterdrückten Kiefern sind in der Regel sehr schwach entwickelt. Die Astreinigung ist oftmals so weit fortgeschritten, dass das Kronenverhältnis bis auf 20 % oder noch weniger heruntergeht. Die kleine, leichte Krone übt jedoch eine nicht unbedeutende Knickwirkung aus, da sie am Gipfel eines schlanken Stammes sitzt. Das Moment, das durch das Gewicht der Krone verursacht wird, ist mit den Momenten des Schafteigengewichtes und Winddruckes völlig vergleichbar.

Wenn das Kronengewicht in die mathematischen Berechnungen eingeht, wird zu ihm teils das Gewicht der Nadeln und Zweige und teils das Gewicht eines gewissen innerhalb der Krone liegenden Stammteiles gerechnet. Dieser Teil besteht aus dem, was von dem kronenbekleideten Stammteil übrig bleibt, wenn davon abgezogen wird, was demjenigen Rotationskörper angehört, dessen Konturen mit denen des kronenfreien Stammes zusammenfallen, dessen Scheitel aber im Schwerpunkte der Krone liegt. Die demgemäss berechneten Kronengewichte findet man in Tab. 9 angegeben.

Die Bestimmung der Nadel- und Reisfläche der Krone ist nach Methoden ausgeführt, über die ich in einer früheren Arbeit detailliert berichtet habe (1926 b) (vgl. Kap. III).

Die gesamte Nadel- und Reisfläche pro kg Kronenfrischgewicht ist bemerkenswert niedrig. Der Durchschnitt für die 14 untersuchten Probebäume ist  $2,69 \text{ m}^2$ . Dies erklärt sich aus dem Reichtum der Krone an dürrn und nadelarmen Zweigen, die weit grössere Beiträge zum Kronen-

Tab. 8. Kronenfläche der 14 untersuchten Probebäume.  
Kronytan hos de 14 undersökta provträden.

Probebaum Nr.	Nadelfläche m <sup>2</sup>	Reisfläche m <sup>2</sup>	Σ Kronenfläche m <sup>2</sup>	Kronenfläche pro kg m <sup>2</sup>
I .....	0,131	0,121	0,252	2,06
II .....	0,610	0,200	0,810	2,60
III .....	0,148	0,073	0,221	2,62
V .....	0,071	0,124	0,195	1,63
VII .....	1,669	0,418	2,087	2,57
VIII .....	1,570	0,341	1,911	2,97
IX .....	0,750	0,262	1,012	2,60
X .....	0,850	0,326	1,176	2,90
XI .....	0,930	0,201	1,131	3,50
XII .....	1,120	0,241	1,361	3,08
XIII .....	0,457	0,209	0,666	2,27
XIV .....	1,250	0,366	1,616	2,76
XV .....	1,570	0,266	1,836	3,30
XVI .....	1,182	0,446	1,628	2,82

gewicht liefern als zur Kronenfläche. Die Fläche der Nadeln allein pro kg Nadelfrischgewicht ist dagegen recht gross, durchschnittlich 6,3 m<sup>2</sup>, was anderseits auf dem Schattentypus der Nadeln beruht. Sie sind nämlich klein und im Verhältnis zu den Querschnittsdimensionen lang, wodurch ihre spezifische Fläche gross wird.

#### Die Windgeschwindigkeit im Bestande.

Für eine spätere Überlegung ist es notwendig, sich eine Auffassung von der Windgeschwindigkeit und dem Winddrucke des dichtgeschlossenen Bestandes zu verschaffen. Direkte Messungen konnten nicht ausgeführt werden, weil solche allzu grosse Schwierigkeiten bieten. Eine stark approximative Berechnung der Windgeschwindigkeit in verschiedenen Niveaus des Bestandes ist aber mit Hilfe der vorher gefundenen Geschwindigkeitskurven (Kap. 1) möglich. Dazu muss die grösste Höhe des Bestandes und der Schlussgrad bekannt sein. Nach Tab. 7 ist die Bestandsmittelhöhe = 11,2 m. Dieser Wert ist aber zu hoch für das spezielle Gebiet, dem die Probebäume entnommen sind. Für dieses ist eine grösste Höhe von 9 m und eine Mittelhöhe von ungefähr 7 m verzeichnet. Der Schlussgrad des Bestandes dürfte, mit Rücksicht auf die Grösse der Grundfläche pro Hektar, innerhalb des betrachteten Gebietes mit 1,2 anzusetzen sein. Mit Hilfe dieser Angaben sowie der Kurven in Fig. 1 lässt sich die Windgeschwindigkeitskurve des dichtgeschlossenen Kiefernbestandes ohne Schwierigkeit berechnen (siehe Fig. 20).

Die so erhaltene Kurve gilt im besten Falle für die durchschnittlichen Windverhältnisse des Bestandes. Exakt zu beurteilen, wie sich diese

für jeden einzelnen Baum gestalten, liegt ausserhalb des Bereiches jeder Möglichkeit. Einfach durch Rechnung mit einem niedrigeren Schlussgrad als  $1,2$  kann man jedoch wenigstens eine Vorstellung von den Veränderungen der Windgeschwindigkeit in lichterem Teilen des Bestandes erhalten (vgl. Fig. 20).

Für die Probestämme ist notiert, ob sie »frei« oder »geklemt« standen. Für die »freistehenden« Bäume, d. h. die, welche, von Krone bis Krone gemessen, keinen Nachbar in kürzerer Entfernung als  $\frac{1}{2}$  m hatten, muss durchschnittlich ein niedrigerer Schlussgrad repräsentativ sein, als für die zwischen den Nachbarbäumen stark »eingeklemmten« Probestämme. Welchen Schlussgrad man am besten zu wählen hat, ist natürlich unmöglich sicher zu bestimmen. Es ist übrigens unmöglich, auch nur zu entscheiden, ob es nicht richtiger wäre, mit einem höheren Schlussgrad als  $1,2$  für die »geklemt« Bäume zu rechnen, denn die Schlussgradbestimmung ist, wenn es sich um die Windgeschwindigkeit des Bestandes handelt, in hohem Masse abhängig auch von anderen Faktoren als der Grundfläche, wonach ja der Schlussgrad  $1,2$  zunächst beurteilt wurde. Um aber eine Auffassung davon zu ermöglichen, was ein gewisser Schlussunterschied zu bedeuten hat, wird in der folgenden Abteilung eine Berechnung des Winddruckes pro  $m^2$  Kronenfläche sowohl für den Schlussgrad  $1,2$  als für  $1,0$  ausgeführt.

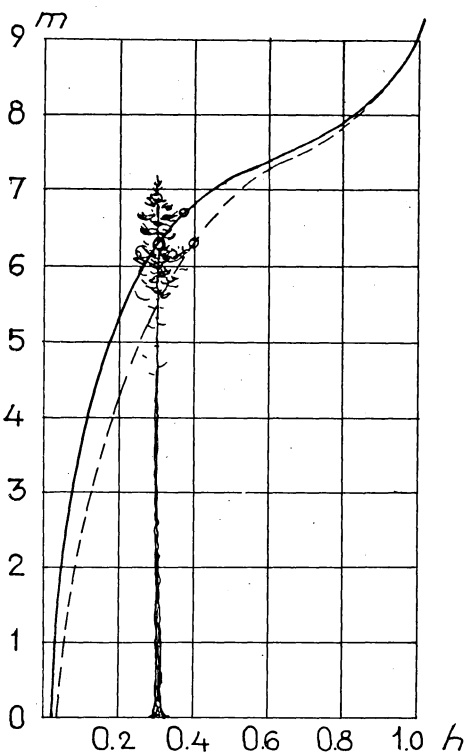


Fig. 20. Ungefähre Kurve für die Windgeschwindigkeit im dichtgeschlossenen Kiefernbestande. Die Geschwindigkeit oberhalb des Bestandes =  $1,0$ . Die gestrichelte Kurve gibt zum Vergleich die Windgeschwindigkeit für vollgeschlossenen Bestand an. Ein etwa 7 m hoher Baum wird im Druckzentrum von einem Wind von  $0,3$  h getroffen. Wenn  $h = 28$  m/sec, wird also  $0,3$  h =  $8,4$  m/sec. Ungefärliga kurvor för vindhastigheten i det tätslutna tallbeståndet. Heldragen linje = slutenhhet  $1,0$ , streckad linje = slutenhhet  $1,2$ .

### Die absoluten Dimensionen.

In Kap. V habe ich die Prinzipien für eine approximative Festigkeitsberechnung vertikal eingespannter Stäbe angegeben, die der kombinierten Beanspruchung durch das Stabeigengewicht, ein Gipfelgewicht und eine

horizontal wirkende Kraft ausgesetzt werden. Um das in der Figur 11 mitgeteilte Diagramm benutzen zu können, ist es notwendig, die Schaftdimensionen der Probebäume gemäss den auf S. 117 gegebenen Prinzipien auf gleichen Durchmesser = 3 cm zu reduzieren. Unter wirklichem Basaldurchmesser wird hierbei der durch Extrapolation der gemessenen Stammkurve erhaltene, wurzelanlauffreie Durchmesser am Boden verstanden (vgl. Figg. 14—19). Mit der wirklichen Länge der Probebäume wird die Länge von der Basis (Boden) bis zum gemeinsamen Schwerpunkte der Krone und des obersten zur Krone gerechneten Stammteiles gemeint (vgl. S. 133). Dieser Schwerpunkt kann approximativ dem Zentrum der Winddruckbeeinflussung gleichgesetzt werden. Die neu konstruierten Bäume mit dem reduzierten Basaldurchmesser 3 cm, der reduzierten Länge und dem reduzierten Gipfelgewicht befinden sich in exakt demselben Belastungszustand wie die wirklichen. Es ist jedoch zu beachten, dass der Wurzelanlauf eine gewisse Stabilisierung des wirklichen Baumes herbeiführt.

Dadurch, dass man in das fragliche Diagramm für die reduzierten Längen und Gipfelgewichte der Probebäume eingeht, und dass man, auf

Tab. 9. Kronengewichte, Längen, Horizontaldruck usw. der Probebäume.  
Provträdens kronvikter, längder, horisontaltryck, m. m.

Probestamm Nr.	Wirkliche Ziffern		Desgl. auf 3 cm reduziert		Grösster m. Stabil. vereinb. Horizontaldruck kg	Druck pro m <sup>2</sup>
	<i>P</i> kg	<i>L</i> m	<i>P</i> kg	<i>L</i> m		
I ..... g <sup>†</sup>	0,152	5,6	0,26	6,3	0,50	1,22
II ..... f	0,311	6,4	0,32	6,4	0,44	0,54
III ..... g	0,130	6,4	0,30	7,6	0,10	0,29
IV ..... g	0,526	6,9	0,37	6,3	0,34	0,35
V ..... g	0,185	6,5	0,18	6,4	0,55	2,75
VI ..... g	0,115	6,0	0,21	7,0	0,30	0,67
VII ..... g	0,840	8,2	0,78	8,0	< 0,00	—
VIII ..... g	0,673	6,5	0,57	6,4	0,21	0,11
IX ..... f	0,426	6,5	0,32	6,0	0,50	0,63
X ..... g	0,435	6,5	0,29	5,9	0,57	0,70
XI ..... f	0,336	6,9	0,30	6,8	0,33	0,32
XII ..... g	0,468	6,8	0,29	6,0	0,53	0,60
XIII ..... f	0,313	6,8	0,36	7,0	0,22	0,29
XIV ..... f	0,625	7,1	0,38	6,3	0,38	0,36
XV ..... f	0,607	6,0	0,44	5,5	0,51	0,38
XVI ..... f	0,634	6,6	0,47	5,9	0,40	0,37
XVII ..... g	0,417	6,4	0,24	5,6	0,66	1,00
XVIII ..... f	1,016	7,4	0,51	6,3	0,28	0,19
XIX ..... f	1,412	6,2	0,44	4,6	0,74	0,55
XX ..... g	0,500	5,8	0,68	6,3	0,15	0,09
XXI ..... g	0,670	6,8	0,46	6,2	0,35	0,27

<sup>†</sup> f = »freistehend», g = »geklemmt».

die Figg. 14—19 gestützt, ihre Form im Verhältnis zum Zylinder und zum kubischen Paraboloid beurteilt, kann man nun einen zwar approximativen, aber doch recht wohlmotivierten Wert des grösstmöglichen, mit Stabilität vereinbaren Horizontaldruckes im Schwerpunkte der Krone erhalten. Die so erhaltenen Ziffern stehen in der vorletzten Spalte der Tab. 9. Für den Probebaum Nr. VII fehlt die Angabe des Horizontaldruckes, weil dieser Baum instabil war. Diese Eigentümlichkeit wird später näher erörtert werden.

Unsere nächste Aufgabe ist nun, zu untersuchen, ob die in Tab. 9 angegebenen Ziffern des maximalen Horizontaldruckes wahrscheinlich sind oder nicht, ob sie also direkt aus zur Verfügung stehenden Angaben der Windgeschwindigkeit und des Schlusses erhalten werden können. Zu diesem Zwecke machen wir uns die Windgeschwindigkeitskurven der Fig. 20 zunutze und nehmen eine bestimmte Abhängigkeit zwischen Windgeschwindigkeit und von der Krone empfangenem Drucke an. Wir setzen voraus, dass diese Abhängigkeit durch die Druckkurve V in Fig. 5 repräsentiert wird. Ferner nehmen wir an, dass die Windgeschwindigkeit oberhalb des Bestandes höchstens 28 m/sec sei.

Die Berechnung des Winddruckes für die reduzierten »geklemmten« bzw. »freistehenden« Bäume ergibt, dass der Winddruck pro m<sup>2</sup> Kronenfläche ist:

für »geklemmte« Bäume <sup>1</sup>	und Schlussgr. 1,2	durchschn. ....	= 0,33	kg
»	»	» I,0	»	..... = 0,45 »
»	»	nach berechn. Horiz.-druck	...	= 0,44 »
» »freistehende«	»	Schlussgr. 1,2	durchschn. ....	= 0,34 »
»	»	» I,0	»	..... = 0,50 »
»	»	nach berechn. Horiz.-druck	...	= 0,39 »

In absoluten Quantitäten sind die »geklemmten« Bäume gemäss dieser Berechnung bei einer Windgeschwindigkeit von 28 m/sec oberhalb des Kronendaches einem Druck von durchschnittlich 0,39 kg ausgesetzt. Die entsprechende Ziffer für die »freistehenden« Bäume ist 0,54 kg. Die beiden Ziffern gelten für den Schlussgrad 1,0. Für den Schlussgrad 1,2 sind die Ziffern etwas niedriger, za. 0,29 bzw. 0,36 kg. Nach den mechanischen Berechnungen dürfte der maximale Horizontaldruck für »geklemmte« Bäume bis auf 0,39 und für »freistehende« bis auf 0,42 kg steigen.

Werden diese Angaben noch auf die wirklichen Dimensionen zurückgeführt, so ergeben sich folgende Ziffern für den Druck im Kronenzentrum:

<sup>1</sup> Ausgenommen Nr. VII.



gebend ist, so muss dieses unbekannte Etwas eine solche Funktion des Alters, der physiologischen Prozesse, des Milieus usw. des Baumes sein, welche den mechanischen Kräften, als Funktion derselben Umstände betrachtet, *sehr* ähnlich ist.<sup>1</sup>

Ein besonders wichtiger Punkt der mechanischen Theorie und überhaupt des Zuwachsesproblems ist die Frage, ob eine Vermehrung oder Verminderung der mechanischen Beanspruchungen einen gesteigerten bzw. verminderten Arbeitseffekt der Assimilationsorgane des Baumes herbeiführt. Leider konnte ich diese Frage bei den Untersuchungen nicht in dem Masse berücksichtigen, dass etwas Bestimmtes darüber gesagt werden kann.

Jedoch ist einer der Probebäume, nämlich Nr. VII, von gewissem Interesse u. a. auch in dieser Hinsicht und verdient daher besonders erwähnt zu werden. Er war aufgewachsen dicht an einem grösseren, dünnen Baume, dessen niedrigste Äste er vor 13 Jahren erreicht und in die er seitdem bei fortgesetztem Höhenzuwachs sich so hineingeschlungen hatte, dass er zur Zeit der Untersuchung von ca. 5,75 m oberhalb des Bodens an bis zum Gipfel (8,2 m) »baumfest« gefesselt war. Als dieser Baum von seiner Stütze gelöst wurde, bog er sich von selbst zu Boden. Der Baum war also instabil. Trotz ihrer eingeklemmten Lage hatte jedoch die Krone eine bedeutende Grösse, 25 % grösser als die grösste Krone der übrigen Probebäume in derselben Durchmesserstufe und 66 % grösser als der Durchschnitt der Stufe. Überhaupt wies die Krone deutliche Zeichen davon auf, dass sie sich in einer kräftigen Entwicklung befand. Es kann jedoch nicht verneint werden, dass dies zum Teil darauf beruhen kann, dass der Baum während seiner letzten Lebensjahre sich in einer günstigeren Lage hinsichtlich der Lichtzufuhr befunden hat, da der Zeitpunkt, wo der Stützbaum verdorrte, nicht sicher bestimmt werden konnte. Von grösserer Bedeutung ist indessen, dass der Schaftzuwachs während der letzten 13 Jahre fast völlig aufgehört hatte. Wie es sich also auch mit den Licht- und Transpirationsbedingungen verhält, und wenn auch der etwaige Zuwachs der Krone die Verminderung des Schaftzuwachses nicht kompensieren kann, so ist es doch klar, dass die Abwesenheit mechanischer Reizung den Zuwachs des Schaftes beeinflusst hat. Es wäre von grösster Bedeutung für das mechanische Zuwachsproblem, dies noch sicherer feststellen zu können.

### Die relativen Dimensionen.

In Fig. 10 werden diejenigen Stabformen wiedergegeben, welche die Träger von gleichem Widerstande gegen die drei Hauptfälle mechanischer Beanspruchung, d. i. gewöhnliche Biegung, Knickung durch ein Gipfel-

<sup>1</sup> Dabei stütze ich mich auch auf die Resultate, die in Kap. VI gewonnen wurden.

gewicht und Knickung durch das Eigengewicht, repräsentieren. Wenn also ein Schaft gemäss mechanischen Prinzipien konstruiert ist, so muss er, je nach der Art der Kraftbeeinflussung, diese drei Formen oder irgendeine dazwischen liegende annehmen können.

Nach den Gleichungen (28) und (32) können die Spannungen des Stabes für eine Kombination der Kraftfaktoren: Eigengewicht ( $E$ ), Gipfelgewicht ( $P$ ) und Horizontaldruck ( $A$ ) sowie für die Voraussetzung, dass der Stab von parabolischer Form ist, berechnet werden. Die Spannung kann dann nicht konstant werden. Wenn sie aber nicht sehr von einem konstanten Werte abweicht, so kann die gleich widerstandsfähige Form des Stabes berechnet werden. In der Gleichung:  $\sigma \frac{\pi}{4} r_x^3 = M_x$ , wo  $\sigma =$  = der Spannung,  $r_x =$  dem Radius des kreisförmigen Querschnitts und  $M_x =$  dem Biegemomente ist, sind nämlich  $M_x$ ,  $r_x$  und  $\sigma$  sämtlich bekannt für eine gewisse Kraftkombination. Wenn dann  $\sigma =$  konstant gesetzt wird, kann statt dessen  $r_x$  berechnet werden.  $r_x$  erhält dann solche Werte, dass der Stab nicht mehr parabolisch wird. Wenn jedoch der Unterschied nicht gross ist, was er in der Tat nicht sein kann, da  $\sigma$  von vornherein als nahezu konstant vorausgesetzt wurde, so kann man ohne gröbere Approximation annehmen, dass das Eigengewicht und die elastische Linie denen eines parabolischen Stabes ähnlich sind. Also erhält man die Form des Stabes, wenn er gegen die fragliche Kraftkombination gleich widerstandsfähig ist.

Wie oben erwähnt, wurden die Probebäume in »geklemmte« und »freistehende« eingeteilt. Betreffs der »geklemmten« Bäume hat man allen Grund anzunehmen, dass das mechanische Gleichgewicht durch den Kontakt mit den rings umherstehenden Nachbarbäumen gestört ist. Dies dürfte bei den »freistehenden« Bäumen in weniger hohem Masse der Fall sein. Von dem wahrscheinlichen Verhältnis kann man durch Vergleich des Kronengewichtes und der Schaftlänge bei den auf 3 cm reduzierten Probebäumen eine Vorstellung erhalten. Je länger der Schaft ist, eine um so kleinere Krone kann er tragen, zumal da der Winddruck mit der Schaftlänge steigt. Eine gesetzmässige Relation zwischen  $P$  und  $l$  dürfte daher bei den »freistehenden« Bäumen vorhanden sein. Die Festigkeit der Relation ist ein grobes Mass des Freistellungsgrades der Bäume im dichtgeschlossenen Bestande. Bei den »geklemmten« Bäumen dürfte keine derartige Gesetzmässigkeit wahrzunehmen sein, denn bei ihnen wirkt ein beträchtlicher Teil des Winddruckes nicht direkt auf die Krone, sondern durch Vermittlung der Nachbarbäume, deren schwankende Bewegungen der »geklemmte« Baum mehr oder weniger gehorsam mitzumachen gezwungen wird. Je nach dem Grade der Einklemmung kann



also bei diesen Bäumen das Kronengewicht unabhängig von der Schaftlänge variieren.

Ein Blick auf die Figg. 21 und 22 zeigt ganz deutlich, dass  $P$  und  $l$  bei den »geklemmten« Bäumen keine Spur eines Zusammenhangs in irgendwelcher Richtung aufweisen, was also die an sich wahrscheinliche Annahme zu bestätigen scheint, dass der Horizontaldruck bei diesen Stämmen hauptsächlich durch Kontakt mit den Kro-

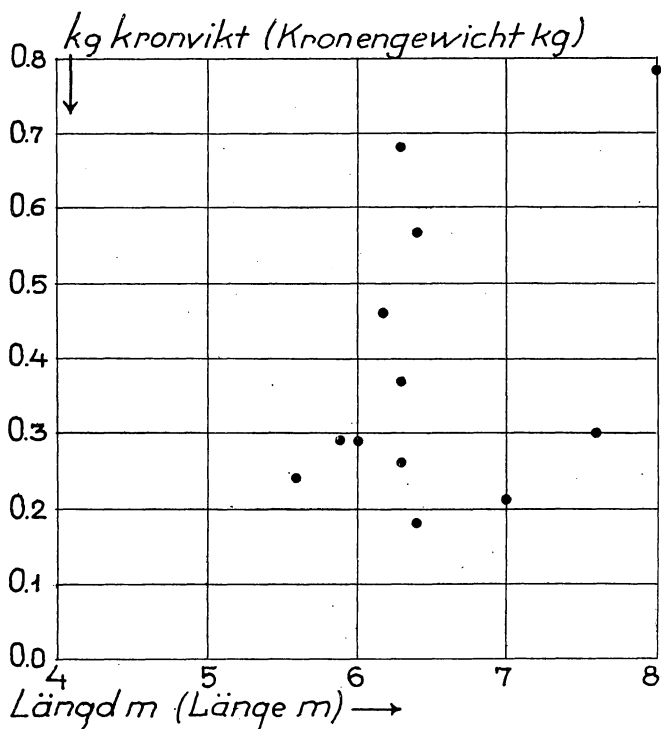


Fig. 21. Kronengewicht im Verhältnis zur Schaftlänge der »geklemmten« Bäume.

Kronvikten i förhållande till stamlängden hos de »klämda» träden.

nen und Stämmen der ringsum stehenden Bäume zustande kommt. Bei den »freistehenden« Bäumen kann man dagegen eine Tendenz zu abnehmendem Kronengewicht mit steigender Schaftlänge deutlich wahrnehmen. Der Zusammenhang ist schwach, aber anderes war auch nicht zu erwarten, da die »freistehenden« Bäume auch ziemlich gedrängt aufgewachsen und nicht ganz dem Einfluss der Umgebung entgangen sind.

Aus dem Obengesagten können wir mit verhältnismässig grosser Sicherheit den Schluss ziehen, dass der Biegungsverlauf der »geklemmten«

Bäume störenden Einflüssen unterworfen ist, die unberechenbare Spannungen im Schaft erzeugen können. Mit Hilfe der vorher gegebenen Gleichungen die Schaftform dieser Bäume zu berechnen, muss daher als völlig unmöglich angesehen werden. Da es jedoch scheint, als ob die »freistehenden« Bäume einen gewissen Grad von Bewegungsfreiheit besässen, so sind dagegen gewisse Aussichten vorhanden, dass eine Form-

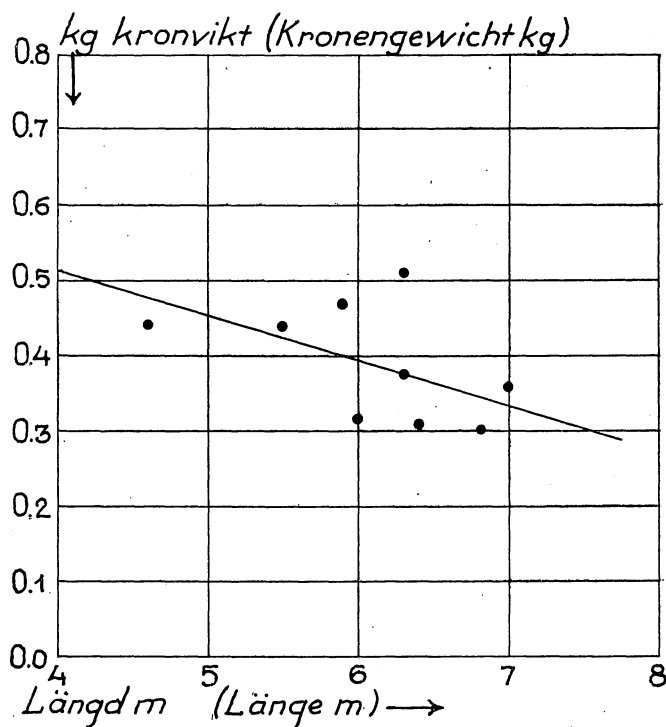


Fig. 22. Kronengewicht im Verhältnis zur Schaftlänge der »freistehenden« Bäume.

Kronvikten i förhållande till stamlängden hos de »fristående» träden.

berechnung für sie gelingen kann. In den folgenden Formuntersuchungen beschränken wir uns also auf die »freistehenden« Bäume.

Aus den Figg. 14—19 ist ersichtlich, dass die »freistehenden« Probestämme sämtlich sich ziemlich nahe an die Grundform des kubischen Paraboloids anschliessen. Es dürfte daher zulässig sein, ihre Form gemäss der in diesem Kapitel entworfenen Methode zu berechnen. Die so berechnete Stammkurve ist neben der wirklichen Stammkurve in den Figg. 14—19 gestrichelt eingezeichnet.

Schon ein flüchtiger Blick auf diese Figuren zeigt, dass das Resultat

der Berechnung nicht ein derartiges ist, dass es ohne weiteres Schlussfolgerungen in bestimmten Richtungen zulässt. Vielmehr erhebt sich die notwendige und schwierige Aufgabe, diejenigen Abweichungen und übrigen Eigentümlichkeiten genau zu diskutieren, die bei Vergleich zwischen berechneten und wirklichen Stammkurven beobachtet werden können.

Um dabei betreffs der Ausdrucksweise ein wenig grössere Freiheit zu erhalten, will ich zuerst einen theoretischen Überblick über diejenigen möglichen Schaftformen geben, die sich als Resultat einer verschiedenartigen Zusammenwirkung von Schafteigengewicht (**E**), Kronengewicht (**P**) und Horizontaldruck (**A**) ergeben können. Wie vorher an mehreren Stellen dieses Aufsatzes, wird der Einfachheit halber angenommen, dass die mechanischen Kräfte wirklich von dominierender Bedeutung für die Schaftform sind, d. h. in den Erörterungen wird von Bäumen, Schäften, Kronengewichten u. dgl. gesprochen, wo eigentlich die Ausdrücke Stäbe, Vertikalkräfte usw. gebraucht werden sollten.

Wenn nur die Horizontalkraft im Druckzentrum der Krone wirkt, so nimmt der Schaft unterhalb desselben die Form eines kubischen Paraboloids an. Wirkt dagegen nur das Kronengewicht, so erhält der Schaft eine beträchtlich vollere Form mit dem Formquotienten  $= 0,915$  (siehe Fig. 10). Eine Kombination dieser beiden Kräfte hat eine Schaftform zur Folge, die ein Zwischending zwischen diesen beiden Typen ausmacht. Je mehr **P** auf Kosten des **A** dominiert, um so vollwüchsiger wird der Schaft. Aus Fig. 10 geht hervor, dass die Kurve der kubischen Parabel und die des Trägers von gleichem Widerstande gegen Knickung beide ziemlich gleichartig verlaufen, sofern man nur von dem oben erwähnten Umstande absieht, dass die letztere Kurve an der Basis parallel der Achse verläuft. Eine stetige Stammkurve, die ohne lokale Störungen der Krümmung verläuft, kann also auf eine gleichzeitige Beanspruchung durch Horizontaldruck und Vertikaldruck zurückgeführt werden, jedoch nur für den Fall, dass sie innerhalb des Formquotientenintervalls  $0,794—0,915$  liegt. Keine andere Kurve als eine solche, deren Ableitung erster Ordnung von der Basis bis zum Gipfel eine kontinuierliche Steigerung erfährt. (d. h. deren Ableitung zweiter Ordnung kein Minimum durchläuft), kann einem Träger von gleichem Widerstande gegen die Kombination von **A** und **P** zugehören.

Wenn der Schaft im Verhältnis zum Basaldurchmesser besonders lang ist, so wird sich das Eigengewicht neben dem Kronengewicht und dem Winddruck stark geltend machen. Seine Einwirkung gibt sich zu erkennen durch eine Tendenz zur Formverschlechterung, die sich besonders in den oberen Teilen des Schaftes bemerkbar macht. Wir denken uns nun, es sei in Fig. 10 eine Kurve interpoliert worden zwischen der

Kurve des Eigengewichtes und den beiden anderen, wobei nur wenig Gewicht auf die letzteren gelegt wird. Es erhellt da, dass ihre Form zwischen der ersten und der kubischen Parabel liegen muss. Trotzdem

die Krone also im Gipfel konzentriert ist, kann der Formquotient unter 0,794 sinken.

Die Interpolation dürfte aber nicht nach Belieben auszuführen sein. Um jedoch den wirklichen Verlauf der Stammkurve bei gleichzeitiger Einwirkung von  $E$ ,  $P$  und  $A$  näher zu ermitteln, ist eine Berechnung mit  $l = 850$  cm,  $P = 0,12$  kg,  $A = 0,12$  kg und dem Basaldurchmesser wie vorher = 3 cm ausgeführt worden. Die resultierende Schaftform wird in Fig. 23 wiedergegeben. Aus dieser ergibt sich, dass der Formquotient in diesem Falle ungefähr = 0,775 ist, er ist also ganz bedeutend unter den Wert 0,794 des kubischen Paraboloids gesunken. Man beobachtet eine ausgeprägte Verflachung der Stammkurve bei ungefähr  $\frac{1}{5}$ — $\frac{1}{4}$  der Höhe, vom Gipfel aus gerechnet. Das Vorhandensein dieser Unregelmässigkeit der Kurve ist das Zeichen eines kräftigen Einflusses

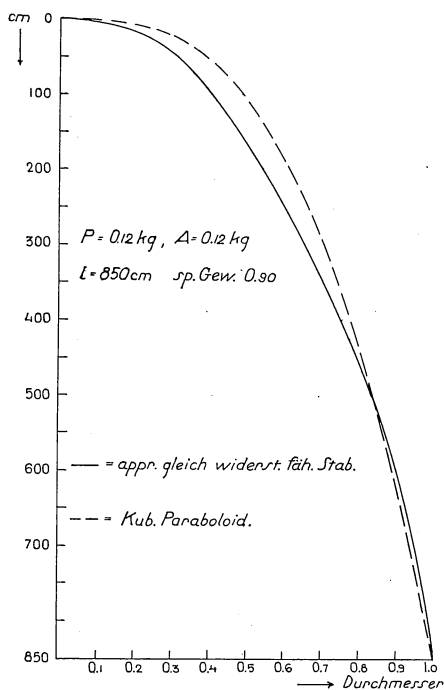


Fig. 23. Stab, approximativ gleich widerstandsfähig gegen eine Kombination von Knickungs- und Biegekraften.

Mot en kombination av avknäcknings- och böjningskrafter jämnstark bjälke.

des Eigengewichtes. Sie entsteht sowohl für die Kombination  $E$  und  $P$  und für die Kombination  $E$  und  $A$  je für sich, als auch für die Kombination  $E$ ,  $P$  und  $A$ . An kurzen Schäften kann man sie nicht bemerken, weil hier  $E$  das Biegemoment nicht hinreichend stark beeinflusst. Zuweilen tritt an die Stelle der Verflachung sogar eine Einbiegung der Schaftkurve. Jedoch muss hier bemerkt werden, dass die Approximation der Gleichung (10) sich bei diesen Berechnungen stark geltend macht. Die Form der Schaftkurve erhält man ja auch durch eine nochmalige Approximation, und es ist daher möglich, dass die erwähnte eigentümliche Einbiegung der Kurve, wenn nicht ganz durch die groben Berechnungsmethoden hervorgerufen, so doch von ihnen kräftig beeinflusst und umgeformt sein kann.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> NB. dass man in Fig. 23 durch Hinzufügung einer Gipfelpartie die Verflachung deut-

Für Stammformen, bei deren Entstehung *E* und *P* eine bedeutende Rolle im Vergleich zu *A* spielen, ist es typisch, dass die Stammkurve in der Nähe der Basis stärker gewölbt ist als sonst, mit anderen Worten, dass sie im Punkte  $x = l$  eine Tendenz hat, der Achse parallel zu verlaufen. Dies ist eine natürliche Folge der Art der Spezialkurven für *E* und *P*. Die wirklichen Stammkurven der Figg. 14—19 zeigen eine ähnliche Tendenz, worauf bei der Extrapolation der Kurve am Wurzelanlauf vorbei Rücksicht genommen werden muss.

Eine nähere Betrachtung der Figg. 14—19 zeigt, dass eine Gruppierung der 21 Probestämme vorgenommen werden kann. Verwandte Züge der Schaftform führen die Bäume zu wenigstens 3 deutlichen Typen zusammen. Der erste von ihnen wird durch Nr. I, XII, XVII und XXI repräsentiert und ist durch bemerkenswert starke Verjüngung und oft durch einen scheinbar hoch am Schaft emporsteigenden Wurzelanlauf charakterisiert. Dieser Typus kommt in dieser Probebaumsammlung nur unter »geklemmten« Bäumen vor und kann mit Hilfe mechanischer Gesichtspunkte nicht erklärt werden, wenn diese ohne besondere Rücksicht auf die gedrückte Stellung der Bäume im Bestande angewandt werden. Nr. II, IX, XIV, XV, XVI und XIX repräsentieren den zweiten Typus. Kennzeichnend für diese Bäume ist die relativ volle Form im Verein mit dem stetigen und regelmässigen Verlauf der Stammkurve. Dieser Typus kommt hier nur unter »freistehenden« Bäumen vor. Der dritte Typus wird durch Nr. III, V, VII, VIII, X, XI und XIII vertreten. Bezeichnend für diese Schäfte ist eine Einbiegung der Stammkurve in der Nähe der unteren Kronengrenze. Sowohl unter »geklemmten« als »freistehenden« Bäumen finden wir diese Eigentümlichkeit wieder. Unter den übrigen Bäumen findet man grosse Ähnlichkeit zwischen Nr. IV und XVIII, von welchen der erste als »geklemt«, der zweite als »freistehend« rubriziert ist. Ebenso erinnern Nr. VI und XX sehr stark aneinander; beide »geklemt«.

Mit dieser Typeneinteilung wird nur beabsichtigt, einige Ordnung in die vorliegenden Probestämme zu bringen. Scharfe Grenzen zwischen den Typen sind nicht vorhanden, und es ist sehr wahrscheinlich, dass eine grössere Anzahl von Probestämmen mehr Typen aufweisen würde.

Betreffs des Typus I wurde schon erwähnt, dass seine Schaftform vom mechanischen Gesichtspunkt aus mit Hilfe derjenigen Gleichungen, die zu diesem Zwecke zu Gebote stehen, nicht berechnet werden kann. Es ist auch äusserst unwahrscheinlich, dass in diesen Stämmen, infolge ihrer eingeklemmten Stellung, derartige Spannungen entstehen können, dass ihre Form dadurch erklärt wird.

licher erkennt. An einer verflachten Kurve kann dann auch eine Einbiegung anderer Art als die oben besprochene zustande kommen.

Der Typus II dagegen scheint gut mit der mathematisch berechneten Stammkurve übereinzustimmen. Die berechneten und wirklichen Formquotienten des Schaftteiles unter dem Schwerpunkt der Krone sind für die Bäume: II = 0,818 bzw. 0,827, IX = 0,808 bzw. 0,810, XIV = 0,823 bzw. 0,820, XV = 0,818 bzw. 0,819, XVI = 0,825 bzw. 0,830, XIX = 0,794 bzw. 0,798. Die relativ gute Übereinstimmung der Formquotienten an und für sich ist von geringem Gewicht, aber da sie von einer Übereinstimmung im allgemeinen begleitet wird, kann sie als Mass derselben dienen. Der bemerkenswerteste Umstand in dieser Gruppe ist, dass der Baum Nr. XIX, der einem sehr lichten Teil des Bestandes entnommen wurde, wo er verschont von jedem störenden Einfluss der Nachbarbäume aufgewachsen war, praktisch genommen ein völlig exaktes kubisches Paraboloid ist. Aus Tab. 9 ist auch ersichtlich, dass seine Höhe unbedeutend ist, nur 46,5 % der kritischen Länge, was zur Folge hat, dass der Schaft, auch theoretisch gesehen, kaum merkbar von dem kubischen Paraboloid abweichen kann. Bei allen den übrigen Bäumen ist der Formquotient grösser als 0,794, was also vom mechanischen Gesichtspunkte aus einer den formverschlechternden Einfluss des Schaftengewichtes überwiegenden, formverbessernden Beeinflussung durch das Kronengewicht zugeschrieben werden muss. Man merkt an einigen dieser Bäume, dass die Stammkurve eine schwache Andeutung einer vom mechanischen Gesichtspunkte aus dem Schaftengewicht zuzuschreibenden Einbiegung oder nur eine schwache Verflachung der Stammkurve innerhalb des entsprechenden Gebietes (unmerklich oder fast unmerklich in den Figg. 14—19) zeigt.

Jene Einwirkung des Eigengewichtes, die bei dem Typus II der weniger bemerkenswerten Länge der hierhergehörigen Bäume undeutlich ist, tritt bei dem Typus III klar zutage. Hierher gehören die beiden »freistehenden« Bäume Nr. XI und XIII, mit den reduzierten Längen 6,8 bzw. 7,0 m. An den berechneten Kurven bemerkt man bei Nr. XI eine Verflachung und bei Nr. XIII eine sehr schwache Einbiegung ungefähr an demjenigen Punkte, wo die wirklichen Stammkurven eine deutliche Einbiegung haben. Die berechneten Kurven haben also eine Tendenz, der wirklichen Kurve zu folgen, sie können sich aber dieser nicht ganz anpassen. Es scheint, als wäre beim Baume die formverschlechternde Einwirkung des Eigengewichtes über ihren mathematischen Betrag hinaus verstärkt. Man könnte zwar glauben, dass dies daher kommt, dass das wirkliche spez. Gewicht dieser Bäume grösser als 0,90 ist. Es ist aber wenig wahrscheinlich, dass es sich so verhält, u. a. weil der Wassergehalt dieser beiden Bäume unter dem Mittel der übrigen betreffs des Wassergehaltes untersuchten Bäume liegt. Man könnte auch

vermuten, dass es auf den Unvollkommenheiten der Untersuchungsmethoden beruht. Dass hierin der Fehler liegt, erscheint glaublicher, aber auch diese Annahme ist nicht geeignet, die mangelnde Übereinstimmung befriedigend zu erklären. Der Umstand, dass die übrigen zu dieser Gruppe gehörenden Bäume auch eine Einbiegung der Stammkurve ungefähr an der erwarteten Stelle zeigen, kann an und für sich nicht nennenswert dazu beitragen, die Frage zu beleuchten, ob diese Anomalie der Einwirkung des Eigengewichtes zugeschrieben werden soll, oder ob sie ganz unabhängig von den mechanischen Kräften entstanden ist, denn wenn diese Bäume auch gewissermassen von ihrer Umgebung irritiert werden, so dürfte es doch nicht als ausgeschlossen zu betrachten sein, dass das Eigengewicht auch bei ihnen sich bemerkbar machen kann. Nur betreffs des Baumes Nr. X ist dies unwahrscheinlich, wegen seiner kurzen Länge (5,9 m red. Länge).

Betrachten wir aber den Baum Nr. VII, der zu diesem Typus gehört und eine sehr stark markierte Einbiegung eben unter der Kronengrenze zeigt, so können wir möglicherweise zu einem Urteil darüber gelangen, ob die Ursache dieses Merkmales des Typus innerhalb oder ausserhalb der mechanischen Gesetze zu suchen ist. Der Baum Nr. VII stand nämlich, wie oben erwähnt, dicht an einem älteren, verdorrtten Baum, in dessen dürres Astwerk er von  $5\frac{3}{4}$  m Höhe an fest eingewachsen war. Dieser Baum ist also seit dem Zeitpunkte, da er za. 6 bis 6,5 m Höhe erreichte, nicht erwähnenswerten mechanischen Beanspruchungen ausgesetzt gewesen.

Bei der naheliegenden Annahme, dass die bei diesem Baume auftretende Einbiegung der Stammkurve derselben Art ist wie bei den übrigen Bäumen, könnte sie also mit einer durch die eingeklemmte Stellung des Baumes verursachten mehr oder weniger bedeutenden Abkoppelung der mechanischen Kräfte zusammenhängen. Es ist aber unmöglich, sicher zu entscheiden, wie es sich damit verhält, da ja auch in diesem Detail die mechanische Theorie eine Erklärungsmöglichkeit liefert oder wenigstens zu liefern scheint. Die hier angeführte Auffassung gewinnt jedoch dadurch eine starke Stütze, dass die Einbiegung mancher der Probestämme (z. B. Nr. III und XIII) nicht recht von derjenigen Art zu sein scheint, die von den mechanischen Gleichungen verlangt wird (vgl. Figg. 14—19 und 23), und oft kräftiger ist, als diese es zugeben.

Betreffs der »geklemmten« Bäume wurde schon gesagt, dass der erste sich schnell verjüngende Typus von der mechanischen Theorie aus nicht erklärt werden kann. Dasselbe gilt von den Bäumen Nr. IV und XVIII, von denen der letztere »freistehend« ist. Die grosse Vollholzigkeit der oberen Schaftteile dieser Bäume scheint jedoch in einigem Zusammen-

hang mit der Beschaffenheit des Holzes stehen zu können. In diesem Fall müsste jedoch eine so gewaltige Wassergehaltssteigerung oder Festigkeitsverminderung in dieser Partie des Schaftes eintreten, dass sie *a priori* unwahrscheinlich ist. Die übrigen Bäume Nr. VI und XX sind beide »geklemt«. Ihre Schaftform, besonders die von Nr. XX, ist sehr voll. Man kann sich nicht gut denken, dass ihre Stammform durch irgendwelche mechanischen Kräfte verursacht ist.

Das Resultat der nun zu Ende geführten Diskussion der Verjüngung der Prohebäume vom mechanischen Gesichtspunkte aus ist kaum als besonders günstig für die mechanische Schaftformtheorie zu betrachten. Unzweifelhaft gibt es Fälle, wo die Theorie eine völlig befriedigende Erklärung der speziellen Schaftformen liefert, und diese Fälle sind auch gerade diejenigen, bei welchen man überhaupt die mechanischen Gesichtspunkte am meisten berechtigt findet. Aber andererseits haben sich diese als unfähig erwiesen, eine klare Auskunft über eine grosse Menge anderer Fälle, die sich in Wirklichkeit betrifft der mechanischen Belastungsverhältnisse nicht wesentlich von den ersteren unterscheiden, zu geben. Der Umstand, dass diese letzteren Fälle grösstenteils solche Bäume sind, die, wegen besonders gedrängter Stellung im Bestande, in eigenartigen Belastungsverhältnissen aufgewachsen sind oder wenigstens einige Zeit unter dem Einfluss solcher gestanden haben, kann nicht ohne weiteres als eine Erklärung für die bei ihnen mangelnde Übereinstimmung mit der mathematisch berechneten Schaftform angeführt werden. Denn in solchem Falle sollten die Abweichungen einigermaßen gleichartig sein, was aber kaum zutrifft. Die Bedeutung der Grobheit der Berechnungsmethoden für das Auftreten dieser Abweichungen darf dagegen nicht unterschätzt werden. Es dürfte also nicht als ausgeschlossen zu betrachten sein, dass ein beträchtlicher Teil der oben besprochenen Abweichungen verschwinden oder unter gewisse, durch andere Verhältnisse bedingte, Fehlergrenzen heruntergebracht werden kann, wenn die wichtigen Hauptgleichungen eine allgemeine Lösung erhalten haben. Persönlich bin ich der Meinung, dass die Aufgabe, eine solche zustandezubringen, von grösster theoretischer Bedeutung ist, wenn auch dadurch keine grössere Veränderung in den approximativen Berechnungen entstände.

#### Schlusswort.

Nach den in diesem Aufsätze angestellten ziemlich flüchtigen Versuchen einer Anwendung der im Detail ausgebauten mechanischen Theorie zu urteilen, erscheint es denkbar, dass die Stärke der Bäume sich den mechanischen Ansprüchen anpasst, die an sie gestellt werden. Die Schaft-



form hat sich auch in manchen Fällen als mit den Forderungen der mechanischen Theorie übereinstimmend erwiesen, in manchen Fällen hat aber diese Übereinstimmung vollständig gemangelt.

Bei der Gestalt, die der Zusammenhang zwischen Windgeschwindigkeit und Winddruck angenommen hat, wird unbedingt die Schaftform und natürlich auch die Stärke des Schaftes, aus mechanischem Gesichtspunkte betrachtet, von absoluten Grössen abhängig. Besonders stark tritt dies zutage, wenn man Rücksicht nimmt auf das Schaft- und Kronengewicht, das oft, nicht nur betreffs extrem schlanker Stämme, höchst beträchtlich einwirkt.

Bei der Voraussetzung, die bei der mechanischen Theorie stets mit angenommen werden muss, dass nämlich die Spannung bei der mechanischen Deformation der Reizungsfaktor ist, muss es immer möglich sein, die Schaftform im grossen und ganzen unabhängig vom Alter der Bäume durch die mechanischen Gleichungen zu berechnen. Dass die Spannung in der Tat als Reizungsfaktor dienen kann, ist unbestreitbar betreffs der Qualität des Zuwachses (»Rotholz«, »bois de compression«) und wahrscheinlich betreffs dessen Quantität. Es ist aber nicht ohne weiteres zu verneinen, dass auch die Deformation an und für sich als ein solcher Faktor fungieren kann. Bei so bewandten Umständen nimmt die mechanische Theorie begreiflicherweise einen ganz anderen Charakter an.

Die absoluten Dimensionen dagegen können nicht unabhängig vom Alter und Wachstum des Baumes berechnet werden. Denn wenn z. B. bei einem alten Baum die Krone sich in fortschreitender Entkräftung befindet, so wird der Schaft, der das Resultat des summierten Zuwachses vorhergehender Zeitperioden ist, in einer unberechenbaren Weise immer mehr überstark. Sehr junge Bäume bleiben indessen oft durch ihre Stellung nahe am Boden und in dichten Beständen von ernsteren Kraftbeanspruchungen verschont. Man kann sich da sehr gut denken, dass ihre Stämme sich nicht der doch etwa vorhandenen kleinen Kraftbeanspruchung anpassen, sondern dem Bedarf der transpirierenden Krone an Wasserbahnen, ein Bedarf, der in diesem Falle vielleicht weit grösseren Zuwachs fordert als das Bedürfnis mechanischer Festigkeit.

Der Umstand, dass die mechanische Reizung im Durchschnitt für eine Vegetationsperiode viel niedriger ist, als es der Grösse der Dimensionen entspricht, bezeichnet nichts besonders Merkwürdiges. Aus den Kap. III und V geht hervor, dass es keineswegs sicher oder auch nur glaublich ist, dass gerade die Bruchfestigkeit in physiologischem Zusammenhang mit den Zuwachsreaktionen steht, wenn nun überhaupt ein derartiger Zusammenhang existiert. Eher könnte man vermuten, dass die Spannung

an der Elastizitäts- oder Fließgrenze durch die Zuwachsreaktionen innerhalb bestimmter Grenzen gehalten wird. Dies ist auch deswegen wahrscheinlich, weil die Bäume sonst oft mit Reparaturarbeit beschäftigt sein müssten.

Manche Beobachtungen liegen vor, die auf die grosse Bedeutung der ernährungsphysiologischen Vorgänge hindeuten. Ich bin der Meinung (es ist ja natürlich, dass man schliesslich dahin kommen muss), dass das Problem der Schaftform nicht gelöst werden kann ohne tiefgehende Kenntnis der Physiologie der Transpiration und des Nahrungs- transports des Baumes.

Es ist ja z. B. unmöglich, sicher zu entscheiden, ob es überhaupt be- rechtigt ist, eine mechanische Berechnung der Bäume dichtgeschlossener Bestände auszuführen, denn diese Bäume leben gewiss in sehr ungün- stigen Verhältnissen, die das Reaktionsvermögen der Bäume vielleicht beträchtlich herabgesetzt haben. Sie führen kaum ein individuelles Leben.

Das vielleicht wichtigste Resultat der vorliegenden Untersuchungen über die Schaftdimensionen ist die Klarheit über die Art und Beschaf- fenheit der Schwierigkeiten, gegen welche man anzukämpfen hat, sowie eine gewisse Kenntnis davon, mit welchen Hoffnungen man ihrer künf- tigen Besiegung entgegensetzen darf. Es ist augenscheinlich, dass Unter- suchungen der vorliegenden Art kaum jemals hinreichend sichere Resul- tate geben können. Experimente mit Belastungsversuchen an wachsen- den Bäumen dürften die einzige Möglichkeit bieten, vorwärts zu kommen. Jedoch darf man auch von ihnen nicht zu viel erwarten.

Es ist unzweifelhaft, dass statistische Untersuchungen neben den Ex- perimenten von grosser Bedeutung sind. Vor allem bildet dabei eine allseitige Kenntnis von der Kronenfläche und dem Zuwachs von Bestän- den und Bäumen verschiedener Typen ein erwünschtes Ziel, dessen Er- reichung innerhalb der Grenzen der Möglichkeit liegt. Derartige Unter- suchungen sind von so allseitiger und durchgreifender Bedeutung, dass sie auf alle Weise gefördert werden müssten, wenn auch die endgültige Klarstellung des speziellen Schaftformproblems dessenungeachtet vielleicht noch lange auf sich warten lassen wird.

---

## RESUMÉ

### **Några undersökningar över stamformen.**

Ehuru stamformsfrågan för närvarande måste anses som väsentligen ett teo- retiskt spörsmål av stort intresse, har den dock så ofantligt många anknyt- ningar även till de vitala intressena i det praktiska skogsbruket, att ett arbete på dess klarläggande minst av allt får anses som bortkastat. Det är i klart medvetande härom, som jag i förestående uppsats ägnat mig åt en första genomarbetning av den mekaniska stamformsteorien.

Frågan om trädens stamform och tillväxt (*det skogliga tillväxtproblemet*) kan ses från flera håll. Förutom stammens mekaniska jämviktsförhållanden har sålunda även transpirationen lagts till grund för ett försök att förklara tillväxtens storlek och placering på stammen. Även assimilationsprocessen och näringstransporten kan utnyttjas i syfte att få ett grepp på tillväxtproblemet. I båda dessa fall komma emellertid i så hög grad de fysiologiska problemen i förgrunden, att de svårligen ännu kunna bli föremål för en någorlunda välgrundad diskussion. Det är dock av stor vikt, att detta snart må kunna ske och en förutsättning härför är ett ökat arbete på de fysiologiska metodernas fulländning.

I *första* och *andra* kapitlen redogöres för en del undersökningar över vindhastigheten i beståndet samt förhållandet mellan vindens hastighet och det av trädens kvistar uppfångade trycket.

Båda dessa frågor ha förut behandlats av förf. i uppsatser i Skogsvårdsföreningens Tidskrift (1924, 1926 a). Dock ha här vissa smärre förändringar vidtagits i fråga om några detaljer.

I  *tredje* kapitlet omnämnas i korthet de utförda undersökningarna över trädens barryta, under hänvisning till en tidigare uppsats i denna fråga (1926 b).

Det *fjärde* kapitlet ägnas åt en översikt av de för den mekaniska teorien viktiga hållfasthets- och elasticitetskonstanterna. Beträffande dessa har det konstaterats, att kännedomen om desamma för friskt virke är tämligen bristfällig, vilket ju är helt naturligt, då så gott som alla hållfasthets- och elasticitetsundersökningar hittills enbart utförts med hänsyn till verkets tekniska användning. I fråga om växande träd har det befunnits lämpligt att t. v. räkna med en brotthållfasthet om 200 kg/cm<sup>2</sup>, en elasticitetsmodul om 100,000 kg/cm<sup>2</sup> och en specifik vikt av omkring 0,80—0,90.

I *femte* kapitlet genomgås de mekaniskt-matematiska formlerna för beräkningen av stammarnas form med hänsyn till olika slag av kraftpåkänning. I fråga om dessa formler hänvisas till originaluppsatsen. Dock nämnes här, att beräkningen av den jämnstarka formen vid avknäckning av egenvikten icke kunnat ske analytiskt. För att få en uppfattning om denna bjälktyp har därför ett grafiskt förfarande anlitats. Utredningen av denna i viss mån dunkla punkt är av stort, men huvudsakligen teoretiskt intresse.

I *sjätte* kapitlet redogöres för en tillämpning av den utbyggda mekaniska teorien på några granar av olika typ. Detta kapitel utgör ett kort sammandrag av ett kapitel i en förut på svenska publicerad uppsats (1926 a). Resultatet blev, att trädens stamform synnerligen väl lät beräknas sig med de mekaniska formlerna. Detta omdöme får emellertid under inga förhållanden utan vidare generaliseras. Beträffande trädens absoluta grovlek och styrka gav denna undersökning en antydning om, att även därvidlag en matematiskt tillgänglig lagbundenhet kunde skönjas.

I *sjunde* kapitlet behandlas en undersökning över stamformen i tätslutna bestånd. Därvid beräknades först på matematisk väg de krafter, som de gängliga träden förmå uthärda. Dessa jämfördes med de faktiska krafter, för vilka träden approximativt kunna anses bli utsatta. Det visade sig att någon väsentlig skillnad dem emellan icke kunde konstateras. Därefter studerades trädens form. Det framgick, att stamformen i det tätslutna beståndet är mycket oregelbunden. En stor del av de däri förekommande avsmalningstyperna kunna icke förklaras av mekaniska kraftförhållanden. En annan del

åter bär en tydlig prägel av dessa. På det hela taget synes undersökningen över de absoluta träddimensionernas förhållande till de mekaniska krafterna i högre grad stärka den mekaniska teoriens ställning, än vad undersökningen över formen gör. Ingen av dem är dock synnerligen mycket ägnad att öka tilliten till densamma, om än heller intet väsentligt framkommit, som kan förminska den. — I ett speciellt fall har det kunnat konstateras att de mekaniska förhållandena likvisst utöva ett djupgående inflytande på trädens tillväxt. Det är i själva verket trädens sätt att reagera och reaktionens kvantitativa förhållanden, som ännu måste anses i stort sett obekant. — Under studium av den mekaniska teorien måste man ovillkorligen komma till den uppfattningen, att kännedomen om trädens fysiologi och möjligen även deras årtflighetsförhållanden ännu är alltför bristfällig, för att en fullt invändningsfri arbetshypotes angående deras tillväxt och stamform skall kunna uppställas. — Även om huvudlinjerna i trädens utformning skulle kunna tillskrivas en bestämd orsak, så är det dock fördelaktigt att beakta det förhållandet, att deras miljö med alla dess skiftande egenskaper understundom kan sätta en så avvikande prägel på individen, att denna framstår som ett undantag från regeln. För utformningen av en skoglig tillväxthypotes är ett studium av dessa undantag av stor betydelse. Genom variation av de yttre betingelserna hos normala växande träd kan man även ha hopp om att framställa dylika undantag, som då ge långt mera upplysning om de verksamma faktorerna än de normala fallen göra. Över huvud taget borde således enligt min mening den skogliga forskningen på detta område få en mera fysiologisk och experimentell samt tillika kvantitativ betoning.

#### Litteraturverzeichnis.

- AMILON, J. A., 1926, Barrmassan och stamtillväxten hos mellansvensk tall (Die Nadelmasse und der Schaftzuwachs der mittelschwedischen Kiefer). Stockholm.
- ENGLER, A., 1924, Heliotropismus und Geotropismus der Bäume und deren waldbauliche Bedeutung. Mitt. d. Schweiz. Centralanst. f. d. forst. Versuchswesen. Bd. XIII. H. 2.
- , 1918, Tropismen und excentrisches Dickenwachstum der Bäume. Preisschrift. Zürich.
- GREENHILL, A. G., 1881, Determination of the greatest height consistent with stability etc. . . . Proceedings of the Cambr. Phil. Soc., Vol. IV.
- HOHENADL, W., 1922, Neue Grundlagen der Holzmessung. Forstw. Centralbl. H. 2—10.
- JACCARD, P., 1919, Nouvelles recherches sur l'accroissement en épaisseur des arbres. Lausanne et Genève.
- JAHNKE, E., EMDE, F., 1923, Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. Leipzig, Berlin. (Ausserdem mehrere Abhandl. über die Zyl. funkt.).
- JANKA, G., 1900—1904, Untersuchungen über die Elastizität und Festigkeit etc. Mitteil. d. forstl. Versuchsanst. Österreichs.
- METZGER, C., 1893, Der Wind als massgebender Faktor für das Wachstum der Bäume. Mündener forstliche Hefte, Berlin.
- RASDORSKY, WL., 1925, Über die Reaktion der Pflanzen auf die mechanische Inanspruchnahme. Berichte d. deutsch. Bot. Ges. H. 7.
- , 1926, Über die Dimensionsproportionen der Pflanzenachsen. Berichte d. deutsch. Bot. Ges., H. 3.
- SCHWENDENER, S., 1909, Vorlesungen über mechanische Probleme der Botanik. Leipzig.
- TIRÉN, L., 1924, Om en undersökning av vindhastigheten i skogsbestånd. (Über eine Untersuchung der Windgeschwindigkeit in Beständen). Skogsv.fören. Tidskr., H. 4—2.
- , 1926 a, Några undersökningar över stamformen. (Einige Untersuchungen über die Schaftform). Skogsv. fören. Tidskr. H. 1—2.
- , 1926 b, Om barrytans storlek hos tallbestånd. (Über die Grösse der Nadelfläche einiger Kiefernbestände). Medd. fr. Stat. Skogsf.anst.
- WIJKANDER, A., 1897, Untersuchung der Festigkeitseigenschaften schwedischer Holzarten. Göteborg.